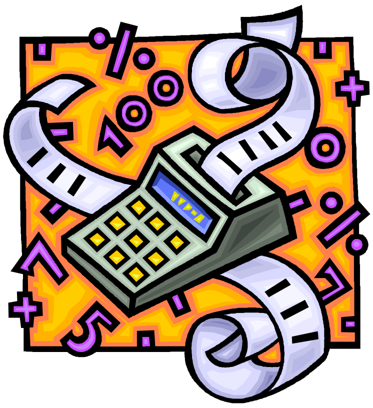
Name:



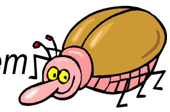
Mathematik-Dossier „Potenzen und Wurzeln“ Stoffsicherung und –repetition.

Inhalt:

- **Potenzen**
- **Die zweite Wurzel (Quadratwurzel)**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

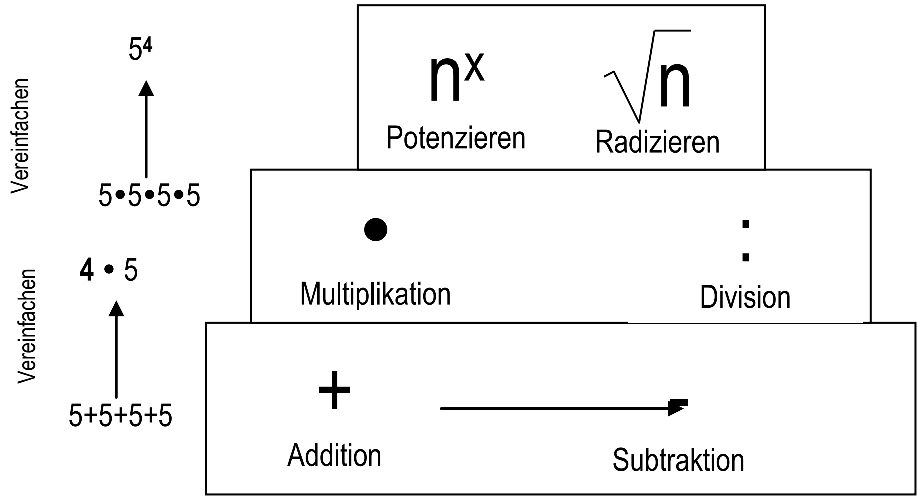
schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Rechnen mit Potenzen

1. Orientierung anhand der Operationen-Pyramide



3. Stufe (Potenzieren / Wurzelziehen (Radizieren)

2. Stufe (Multiplikation / Division)

1. Stufe (Addition/Subtraktion)

Bitte beachten:

- Addition und Multiplikation sind kommutativ und assoziativ.
- **Potenzieren und Radizieren sind NICHT KOMMUTATIV**
- Regeln über die Multiplikation von Dezimalzahlen (**Anzahl Kommastellen**)
  - *Bsp: (0.05 • 0.05 = 0.05^2 = 0.0025 weil die beiden Faktoren zusammen toal 4 Kommastellen haben)*
- Regeln bei Multiplikation von negativen Zahlen (**Anzahl negativer Faktoren**)
- Rechenregeln: Höhere Operationen zuerst (**Hoch vor Punkt vor Strich**)

2. Rechnen mit Potenzen

2.1. Begriffe:

Potenz: $a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}_{\text{n gleiche Faktoren a}} \ldots$

$\boxed{a^n}$ ← *n: Exponent (="Hochzahl". Zeigt an, wie oft die Basis mit sich selber multipliziert wird.)*

a: Basis (Das ist sozusagen der Faktor, welche entsprechend n mal wiederholt wird.)

Natürlich ergeben sich beim Rechnen mit Potenzen auch spezielle Zahlen. Wie wir schon vor einiger Zeit (Beim Rechnen mit Zahlen aus ℕ und ℤ) gemerkt haben, gibt es ausgesuchte Spezialfälle. Dies sind die Potenzen mit den Exponenten 0, 1 oder 2.

Spezialfälle:

Exponent 0: $a^0 = 1$, $5^0 = 1$, also: **ist der Exponent 0, so hat die Potenz immer den Wert 1**.

Exponent 1: $a^1 = a$, $5^1 = 5$, also: **Exponent 1 verändert die Basis nicht**. *(neutrales Element)*
➔ *Der Exponent 1 wird daher nicht geschrieben.*

Exponent 2: Die Potenzen mit Exponent 2. Sie heissen „**Quadratzahlen**". z.B. $4^2 = 16$, $17^2 = 289$

Exponent 3: Die Potenzen mit Exponent 3. Sie heissen „Kubikzahlen". z.B. $3^3 = 27$, $2^3 = 8$

2.2 Geometrische Interpretation der Quadratzahlen (Potenz mit Exponent 2)

Ein Quadrat mit Seitenlänge s hat die Fläche s^2 (s • s). Entsprechend kann man von der Fläche s^2 auf die Quadratseite zurück schliessen, indem man die Zahl bestimmt, deren Quadrat gerade der Fläche entspricht (Die Seitenlänge ist also = s, weil s • s = s^2) (Man macht also die umgekehrte Überlegung als bei der Flächenberechnung)

Dazu zwei Zahlenbeispiele:

- Ein Quadrat mit Seitenlänge 5cm hat die Fläche 25 cm^2 (denn Länge • Breite = Fläche, also 5 • 5 = 25)
- Ein Quadrat mit der Fläche 49cm^2 hat die Seitenlänge 7cm (weil eine Zahl gesucht wird, deren Quadrat 49 ergibt. Man sucht sozusagen die Unbekannte x, für die gilt x • x = 49. Hier ist x die Zahl 7, denn 7 • 7 = 49).

2.3 Die ersten zwanzig Quadratzahlen in der Übersicht

Nachfolgend eine Liste der Zahlen von 1 bis 20 und ihrer Quadratzahlen. Speziell beim Rechnen mit Wurzeln und – später auch – in der Geometrie (Satz des Pythagoras) – sind diese Quadratzahlen wichtig. Es lohnt sich, *diese alle auswendig zu kennen*.

Zahl (n)	*Quadratzahl (n^2)*
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Zahl (n)	*Quadratzahl (n^2)*
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

Speziell lässt sich etwas über die Differenz von zwei benachbarten Quadratzahlen aussagen. Dazu betrachten wir die folgende Tabelle:

Quadratzahlen	*Basiszahl*	*Summe*	*Differenzbildung Quadrate*	*Differenz der Quadrate*
1, 4	*1, 2*	*2+1 =* ***3***	$2^2 - 1^2 = 4-1 =$	***3***
4, 9	*2, 3*	*3+2 =* ***5***	$3^2 - 2^2 = 9-4 =$	***5***
9, 16	*3, 4*	*4+3 =* ***7***	$4^2 - 3^2 = 16-9 =$	***7***
16, 25	*4, 5*	*5+4 =* ***9***	$5^2 - 4^2 = 25-16 =$	***9***

Aus dieser Tabelle können wir die folgende Regel ableiten:

Die Differenz zweier benachbarten Quadratzahlen ist gerade so gross wie die Summe der entsprechenden Basiszahlen.

2.4 Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen

$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$ (eine Art „Ausklammern“)

$(a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n$ (eine Art „Auspotenzieren“)

ebenso gilt bei Brüchen:

$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a:b)^n$ und umgekehrt.

Zahlbeispiele zur Überprüfung

$5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133 \neq (5+2)^3 = 7^3 = 343$

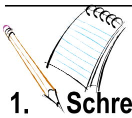
$5^3 - 2^3 = 125 - 8 = 117 \neq (5-2)^3 = 3^3 = 27$

Bei Addition / Subtraktion ist *<u>kein Zusammenfassen</u>* *möglich*
➔***Es gibt also keine speziellen Regeln für die Addition/Subtraktion von Potenzen. Es gilt aber (natürlich)::“Hoch vor Punkt vor Strich“.***

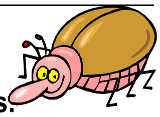
$\mathbf{5^3 \cdot 2^3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \mathbf{= (5 \cdot 2)^3} = 10^3 = 1000$

$\mathbf{5^3 : 2^3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 : 2 : 2 : 2 = 5 : 2 \cdot 5 : 2 \cdot 5 : 2 \mathbf{= (5 : 2)^3} = 2{,}5^3 = 15{,}625$

Bei Multiplikation/Division ist „Zusammenfassen“ möglich. ***Es gelten die Regeln wie oben formuliert****.*



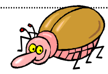
Aufgaben „Rechnen mit Potenzen“



1. Schreibe die folgenden Rechnungen in den nächst höheren Operationsstufen und rechne danach aus.

	Term	In nächst höherer Stufe:	Ergebnis
a)	$(-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5)$		
b)	$7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7$		
c)	$x \bullet x \bullet x \bullet x$		
d)	$(-0.5) \bullet (-0.5) \bullet (-0.5)$		
e)	$5 + 5 + 5 + x + x$		
f)	$\frac{3}{7} \bullet \frac{3}{7} \bullet \frac{3}{7} \bullet \frac{3}{7}$		
g)	$(-\frac{2}{5}) \bullet (-\frac{2}{5}) \bullet (-\frac{2}{5}) \bullet (-\frac{2}{5})$		

2. Berechne die folgenden Terme (Beachte die Potenzregeln und die Regeln für die Anzahl Kommastellen)



a) $(-19)^2$

b) 0.2^2

c) $(-7)^3$

d) 0.2^4

e) $(-2)^5$

f) $(-1)^{45}$

g) $(-1)^{48}$

h) $(\frac{3}{7})^3$

i) $(\frac{(-2)}{4})^5$

k) $\frac{2^5}{(-3)^3}$

3. Welches der Zeichen <, = oder > musst du für den Platzhalter einsetzen, damit eine wahre Aussage entsteht?

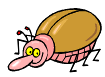
a) $(-0.1)^6 \square (-0.1^6)$ $\square$ =

b) $(-2)^5 \square (-5^2)$ $\square$ =

c) $0.01^4 \square 0.1^5$ $\square$ =

d) $(-4)^3 \square (-3^4)$ $\square$ =

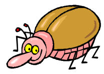
e) $0.01^6 \square 0.1^3$ $\square$ =



4. Welche beiden benachbarten Quadratzahlen haben die folgende Differenz (siehe Regel dazu im Theorieteil)?

	Differenz	Berechnungsweg	Quadratzahl 1	Quadratzahl 2
a)	39			
b)	5			
c)	31			
d)	81			
e)	71			

5. **Schreibe die folgenden Terme ohne Klammer (Beachte dazu die Potenzgesetze im Theorieteil)**



a) $\left(\frac{4p}{6}\right)^4$ ....

b) $(-14ef)^2$ ....

c) $\left(\frac{3f}{(-5)}\right)^3$ ....

d) $\left(\frac{36x}{45y}\right)^2$ ....

e) $\left(\frac{(-a) \bullet (-b)}{(-7)}\right)^2$ ....

f) $(-6ab)^3$ ....

g) $(14gh)^2$ ....

6. **Berechne die folgenden Terme (mit den Potenzgesetzen und den Rechengesetzen aus dem Theorieteil)**

a) $33 - 3 \bullet (-2)^3$ ....

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ....

c) $\frac{2^2}{3^3} + \left(-\frac{1}{3}\right) : 9$ ....

d) $(3^2 - 2^3) \bullet 3^3 - (-2^2)$ ....

e) $((-58.4) - 13.1)^2 : (0.5^2 \bullet 11)$ ....

f) $(-62.3) \bullet ((-11.7) : 3.25)^2$ ....

7. **Rechne die Terme aus: (Beachte die Rechengesetze aus dem Theorieteil)**

a) $\frac{0.584 \bullet 19^2}{3 \bullet 12^2}$ ....

....

b) $\frac{0.12158 \bullet 100 + 18^2}{\frac{2^2}{3} \bullet 0.1^2 + 8}$ ....

....

c) $\frac{0.1^2 + 9.25 \bullet 7}{0.58 + 7 \bullet 2^2} + (169 + 3^2)^2$ ....

....

d) $\frac{[9.364 - 19.25]^2 \bullet 1.5}{3019 - 12 \bullet 3^2}$ ....

....

2. Die zweite Wurzel (Quadratwurzel)

1. Quadratwurzeln

2.1. Begriffe:

Wurzel: $\boxed{\sqrt{r}}$ ⟵ **r**: Radikand ($r \in \mathbb{N}_0$)

Wurzelzeichen

Wurzelziehen ist die Umkehrung des Potenzierens. Im Moment betrachten wir die zweiten Wurzeln (Quadratwurzeln). Wichtig zu wissen ist, **dass Quadratwurzeln nur von positiven Zahlen gezogen werden. Von negativen Zahlen können keine Wurzeln bestimmt werden.**

2.2 Spezielle Wurzeln

Die speziellsten Wurzeln sind sicherlich die Wurzeln aus Quadratzahlen, denn diese lassen sich ganzzahlig berechen.

Wurzeln aus Quadratzahlen → $\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{1} = 1$ usw.
$\sqrt{225} = 15$ $\sqrt{4} = 2$

Daneben kann man aber aus jeder positiven Zahl die zweite Wurzel berechnen. Sobald die Zahl unter der Wurzel (der Radikant) aber keine Quadratzahl ist, hat die ausgerechnete Wurzel viele Kommastellen. Aus diesem Grund verzichtet man meistens darauf, die Wurzel ausgerechnet hinzuschreiben, wenn sie nicht ganzzahlig ausgerechnet werden kann. Mit dem Taschenrechner kann man den Wurzelterm gut eingeben, so dass die Genauigkeit des Ergebnisses auch auf diesem Weg gewährleistet ist.

Wurzeln aus positiven Zahlen, die keine Quadratzahlen sind

$\sqrt{2} \approx 1.4142136$
$\sqrt{3} \approx 1.7320508$ usw.

Diese Wurzeln werden normalerweise nicht ausgerechnet, man schreibt also im Ergebnis z.B. $\sqrt{2}$, da dies viel genauer und weniger umständlich ist, als der Wert 1.4142136

2.3 Rechenregeln mit Wurzeln

$\sqrt{\mathbf{a}} \bullet \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a \bullet b}}$ („Wurzel zusammenfassen")

$\sqrt{\mathbf{a \bullet b}} = \sqrt{\mathbf{a}} \bullet \sqrt{\mathbf{b}}$ („Wurzel aufteilen")

ebenso:

$\sqrt{\mathbf{a}} : \sqrt{\mathbf{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\mathbf{a:b}}$ und umgekehrt

Zahlbeispiele zur Überprüfung:

$\sqrt{\mathbf{64}} + \sqrt{\mathbf{36}} = 8 + 6 = 14 \neq \sqrt{\mathbf{64 + 36}} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{\mathbf{64}} - \sqrt{\mathbf{36}} = 8 - 6 = 2 \neq \sqrt{\mathbf{64 - 36}} = \sqrt{28} \approx 5{,}2915026$

Bei Addition / Subtraktion ist <u>kein Zusammenfassen</u> möglich
➔***Es gibt also keine speziellen Regeln für die Addition/Subtraktion von Potenzen. Es gilt aber (natürlich)::"Hoch vor Punkt vor Strich".***

$\sqrt{\mathbf{64}} \cdot \sqrt{\mathbf{36}} = 8 \cdot 6 = 48 = \sqrt{\mathbf{64 \cdot 36}} = \sqrt{2304} = 48$

$\sqrt{\mathbf{36}} : \sqrt{\mathbf{64}} = 6 : 8 = \frac{3}{4} = \sqrt{\mathbf{36 : 48}} = \sqrt{0{,}5625} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$

Bei Multiplikation/Division ist Zusammenfassen möglich.
Es gelten die Regeln wie oben formuliert.

2.4 Umformen von Quadratwurzel-Aufgaben ohne Taschenrechner

Wurzeln aus grossen Zahlen können durchaus ohne Taschenrechner ausgerechnet werden. Dazu ist es wichtig, die gegebenen Zahlen unter der Wurzeln in ein Produkt von möglichst vielen Quadratzahlen zu zerlegen (es geht auch über die Primfaktorzerlegung) und diese dann zu zerlegen.

Weg über die Zerlegung in möglichst viel Quadratzahlen:

$\sqrt{98} \quad = \sqrt{2 \bullet 49} \quad = \sqrt{2} \bullet \sqrt{49} \quad = \sqrt{2} \bullet 7 \quad = 7 \bullet \sqrt{2} \quad = \mathbf{7\sqrt{2}}$

In ein Produkt mit möglichst vielen Quadratzahlen zerlegen

Produkt unter der Wurzel kann aufgeteilt werden in ein Produkt von Wurzeln

Wurzel der Quadratzahl berechnen

Wurzelterm am Schluss schreiben (so ist klar, wo das Wurzelzeichen endet.

Weiteres Beispiel

$\sqrt{1083} \quad = \sqrt{3 \bullet 361} \quad = \sqrt{3} \bullet \sqrt{361} \quad = \sqrt{3} \bullet 19 \quad = 19 \bullet \sqrt{3} \quad = 19\sqrt{\mathbf{3}}$

Weg über die Zerlegung in Primfaktoren:

$\sqrt{98} \quad = \sqrt{2 \bullet 7 \bullet 7} \quad = \sqrt{2} \bullet \sqrt{7} \bullet \sqrt{7} \quad = \sqrt{2} \bullet 7 \quad = 7 \bullet \sqrt{2} \quad = \mathbf{7\sqrt{2}}$

In ein Produkt von Primfaktoren zerlegen

Produkt unter der Wurzel kann aufgeteilt werden in ein Produkt von Wurzeln

„Päärli“ von gleichen Wurzeln bilden: Immer zwei gleiche geben eine ganze Zahl (oben: $\sqrt{7} \bullet \sqrt{7} = 7$)

Wurzelterm am Schluss schreiben (so ist klar, wo das Wurzelzeichen endet), evt. Wurzeln zusammenfassen

Weiteres Beispiel

$\sqrt{5600} \quad = \sqrt{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 7} \quad = \sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \bullet \sqrt{5} \bullet \sqrt{5} \bullet \sqrt{7}$

$= 2 \bullet 2 \bullet \sqrt{2} \bullet 5 \bullet \sqrt{7}$

$= 2 \bullet 2 \bullet 5 \bullet \sqrt{2} \bullet \sqrt{7} = 20 \bullet \sqrt{2 \bullet 7} = 20 \bullet \sqrt{14} \quad = \mathbf{20\sqrt{14}}$

Aufgaben „Quadratwurzeln“

1. Bestimme den gesuchten Zahlenwert für folgende Quadrate:

Flächeninhalt	289			225		169		25		361	
Seitenlänge		16	14		9		12		11		18

2. Welches der Zeichen <, = oder > musst du für den Platzhalter einsetzen, damit eine wahre Aussage entsteht?

a) $5\sqrt{3} \; \square \; \sqrt{15}$ $\square$ = ______________________

b) $\sqrt{\frac{12}{19}} \; \square \; \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{19}}$ $\square$ = ______________________

c) $\sqrt{25 + 144} \; \square \; \sqrt{25} + \sqrt{144}$ $\square$ = ______________________

d) $\sqrt{363} \; \square \; 11\sqrt{3}$ $\square$ = ______________________

e) $(-10)^6 \; \square \; (-10^6)$ $\square$ = ______________________

3. Berechne die folgenden Quadratwurzeln (verwende dazu, wenn nötig, deinen Taschenrechner) :

	Term	Berechnungsweg:	Ergebnis
a)	$\sqrt{125-58}$		
b)	$\sqrt{68.54}$		
c)	$\sqrt{1358.12}$		
d)	$\sqrt{(-198)}$		
e)	$\sqrt{92-4^2}$		
f)	$\sqrt{12^2 + (-45)^2}$		
g)	$\sqrt{35^2+(-18)^2-13^2+(-15^2)}$		

4. Berechne die folgenden Terme (Verwende die Rechenregeln und den Taschenrechner, wo nötig)

a) $\sqrt{\frac{1373919^2}{13.6^2} - (-\frac{13}{5})^2}$

b) $\sqrt{\frac{7 \bullet \sqrt{(-15)^2}}{3} + \frac{20.1673}{\sqrt{8}}}$

c) $\frac{1}{5} \bullet \sqrt{0.0361}$

d) $\frac{(-1)}{3} + (-\sqrt{\frac{9}{169}})$

5. Forme die Quadratwurzeln OHNE TASCHENRECHNER so weit wie möglich um (Verwende dabei die Theorie zum „Umformen von Quadratwurzeln ohne Taschenrechner“)

	Term	Umformung
a)	$\sqrt{50}$	
b)	$\sqrt{136}$	
c)	$\sqrt{412}$	
d)	$\sqrt{1444}$	
e)	$\sqrt{238}$	

6. Forme die Quadratwurzeln so weit wie möglich um (Verwende dabei die Theorie zum „Umformen von Quadratwurzeln ohne Taschenrechner“)

	Term	Umformung
a)	$\sqrt{7a \bullet 49ab}$	
b)	$\sqrt{33y^2-(4y)^2}$	
c)	$\sqrt{362r^2 +(-r^2)}$	
d)	$\sqrt{(13c \bullet 26)}$	
e)	$\sqrt{36 \bullet 49 \bullet r \bullet q}$	