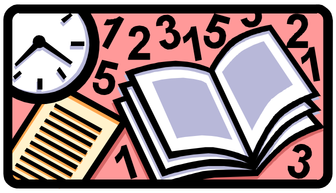
Name:



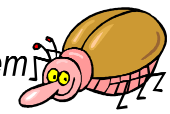
Mathematik-Dossier „Grundoperationen in $\mathbb{Q}$“ Stoffsicherung und –repetition.

Inhalt:

- **Teilbarkeit von Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ (Teilbarkeitsregeln, ggT, kgV)**
- **Brüche und ihre Eigenschaften**
- **Erweitern und Kürzen von Brüchen**
- **Ordnung der rationalen Zahlen**
- **Gleichnamigmachen von Brüchen**
- **Addition und Subtraktion von Bruchtermen**
- **Multiplikation und Division von Bruchtermen**
- **Gemischte Operationen mit Bruchtermen**
- **Gleichungen mit Bruchtermen.**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Teilbarkeit von Zahlen aus $\mathbb{N}_0$

1. Teilbarkeitsregeln

Für viele Aufgaben ist es von grosse Wichtigkeit, zu wissen ob eine Zahl teilbar ist und – wenn ja – durch welche Zahl(en). Zuerst gelten folgende Begriffsdefinitionen:

> Eine natürliche Zahl n ist durch eine natürliche Zahl m teilbar, wenn der Quotient n:m wieder eine natürliche Zahl ist (die Division also restlos aufgeht).
>
> **m** heisst dann **Teiler von n**.
> **n** heisst dann **Vielfaches von m**.

→ z.B. 8 ist ein Vielfaches von 2 und 2 ein Teiler von 8; weil 8:2 = 4 (also aufgeht).

<u>**Die gebräuchlichsten Teilbarkeitsregeln**</u>

Endzifferregeln:

Eine ganze Zahl ist teilbar durch

Wohin schauen?

w x y z	2	wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist
w x y z	4	wenn die von den letzten zwei Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist..
w x y z	8	wenn die von den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
w x y z	5	wenn die letzte Ziffer eine 5 oder eine 0 ist
w x y z	10	wenn die letzte Ziffer eine 0 ist.

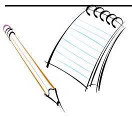
Quersummenregeln:

Eine ganze Zahl ist teilbar durch

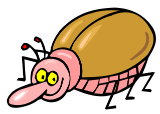
w x y z → w + x + y + z	3	wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist
w x y z → w + x + y + z	9	wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist
w x y z → z – y + x - w	11	wenn ihre alternierende Quersumme (von rechts, - +) durch 11 teilbar ist.

<u>Bemerkungen:</u>

Eine Zahl ist teilbar durch 6, wenn sie sowohl durch 2, als auch durch 3 teilbar ist.
Teilbar durch 12: Die Zahl ist teilbar durch 3 und durch 4.
Die Regel für die Teilbarkeit durch 7 muss nicht gelernt werden.



Aufgaben „Teilbarkeit“



1. Bestimme, durch welche Zahlen die angegebene Zahl teilbar ist.

Zahl	Überprüfungsart / Notizen:	Teilbar durch									
		2	3	4	5	6	8	9	10	11	12
125		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
351		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
282		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5088		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
352		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
71516		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
38580		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
95623		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5124		☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

....

....

....

....

2. Natürliche Zahlen und ihre Teiler

Um die Teiler einer Zahl zu bestimmen, können wir zwei verschiedene Methoden anwenden:

a) Methode der komplementären Teiler

Wir suchen die Teiler von 120 und finden z.B. $1 \bullet 120 = 120$ (somit sind 1 und 120 komplementäre Teiler, da sie als Produkt gerade 120 ergeben), weiter $2 \bullet 60 = 120$ (also sind auch 2 und 60 komplementäre Teiler) usw. Wir schreiben:

1	120
2	60
3	40
4	30
5	24
6	20
8	15
10	12

also T_{120} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120)

<u>Wichtig:</u> Jede Zahl hat mindestens 2 Teiler, nämlich 1 und sich selber.

<u>Begriffe:</u> Zahlen, welche genau 2 Teiler haben (also **nur durch 1 und sich selber teilbar sind**) heissen **Primzahlen**
Zahlen, welche **mehr als 2 Teiler** haben, heissen **zusammengesetzte Zahlen**.
Zahlen, welche eine **ungerade Anzahl Teiler** haben, sind **Quadratzahlen**.

b) Die Primfaktoren-Zerlegung

<u>Idee:</u> **Jede zusammengesetzte Zahl kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden**

Verfahren

1.

Dabei wird immer mit der kleinstmöglichen Primzahl (ohne 1) begonnen. Man zerlegt also in die möglichen Teiler 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. Jede einzelne Primzahl schreibt man dann in die „zerlegte" Reihe von Faktoren hinein.

$120 = \mathbf{2} \cdot 60$

$60 = \mathbf{2} \cdot 30$

$30 = \mathbf{2} \cdot 15$

$15 = \mathbf{3} \cdot \mathbf{5}$

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

2.

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

60

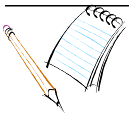
30

15

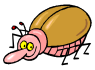
5

Kurzform:

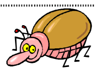
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
60
30
15
5



Aufgaben „Teiler und Primfaktorzerlegung“

1. Bestimme die Teiler der folgenden Zahlen: 

	Zahl:	*Teiler*
a)	126	....
b)	84	....
c)	38	....
d)	52	....
e)	168	....

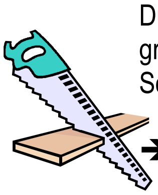
2. Zerlege die folgenden Zahlen in ihre Primfaktoren: 

	Zahl:	Primfaktorzerlegung:
a)	38	....
b)	42	....
c)	164	....
d)	135	....
e)	64	....
f)	44	....
g)	15	....

3. Der grösste gemeinsame Teiler (ggT)

Es ist natürlich wenig interessant, alle Teiler von verschiedenen Zahlen zu betrachten. Sobald man nämlich innerhalb von zwei Zahlen nach einem gemeinsamen Teiler sucht, interessiert meist der Grösste. Und das ggT-Problem taucht oft auf:

3.1 Ein Beispiel, das dir helfen soll, das „ggT-Problem“ (die Ausgangslage) zu verstehen:



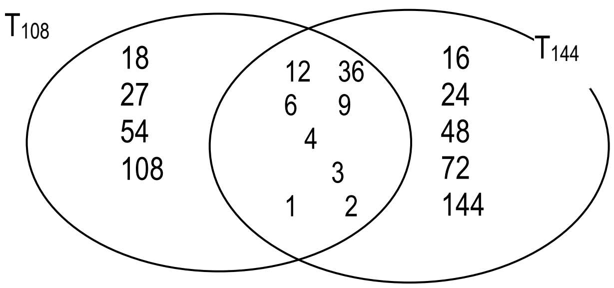
Du hast zwei verschieden lange Holzstäbe (z.B. 108 und 144 cm lang). Du möchtest daraus aber lauter gleich grosse Stücklein herstellen, damit du z.B. einen kleinen Zaun bauen kannst, der deinen Kräutergarten vor gierigen Schnecken schützt.

→ *Du suchst also die Zahl, welche die grösstmögliche Zaunhöhe bringt. Oder anders gesagt: Eine Zahl, durch die du 108 und 144 teilen kannst und die möglichst gross ist.*

Idee: Die gesuchte Zahl ist ganz offensichtlich Teiler von 108 und von 144. Zudem ist sie der grösste dieser Teiler (also: grösster gemeinsamer Teiler = ggT)

Wir suchen also in den Teilermengen dieser beiden Zahlen:

T_{108} = { 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108}
T_{144} = { 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 24, 36, 48, 72, 144}



Wir suchen also in den gemeinsamen Teilern von 108 und 144.
Speziell brauchen wir den grössten Teiler (hier also die Zahl 36)

Lösung: Du machst also jeweils 36cm lange Holzstäbe. (→ Du wirst merken, dass du aus den 108cm langen Stäben jeweils 3 solche Stäbe schneiden kannst (3•36 = 108) und aus den 144cm langen Stäben wirst du jeweils 4 solche Stäbe herstellen können (4•36 = 144).

3.2 Wie bestimme ich den ggT?

Damit du nicht jedes Mal die Teilermengen nach den geeigneten Zahlen durchsuchen musst, gibt es eine einfache, wirkungsvolle und sichere Methode, wie man den ggT von zwei (oder mehreren) Zahlen herausfindet:

ggT- Bestimmung durch Primfaktorzerlegung

Die Idee ist einfach: Du zerlegst jede der beteiligten Zahlen in ihre Primfaktoren. Die gemeinsamen Primfaktoren schreibst du dir raus und bestimmst ihr Produkt. Schon hast du den ggT herausgefunden.

Gesucht ist also der ggT von 108 und 144. Das Vorgehen sieht damit so aus:

diese Angabe schreiben wir immer dazu! → ggT (108, 144)

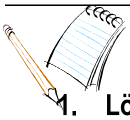
$108 = \boxed{2} \bullet \boxed{2} \bullet \boxed{3} \bullet \boxed{3} \bullet 3 \bullet 3$

$144 = \boxed{2} \bullet \boxed{2} \bullet 2 \bullet 2 \bullet \boxed{3} \bullet \boxed{3}$

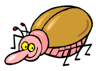
ggT = 2 • 2 • 3 • 3 = 36

Vorgehen:

a) Primfaktorzerlegung für die beteiligten Zahlen
b) gemeinsame Primfaktoren herausschreiben → **ggT**



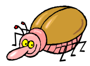
Aufgaben „ggT – Der grösste gemeinsame Teiler“



1. Löse die folgende Satzaufgabe:

Du feierst mal wieder Geburtstag. Deine Mutter hat dazu zwei Kuchen gebacken, die leider unterschiedlich lang wurden (aber gleich hoch und gleich breit sind). Einer ist 35cm, der andere 60 cm lang. Natürlich möchtest du jedem deiner Mitschüler ein gleich grosses Stück Kuchen abschneiden (und natürlich auch nichts übrig lassen). Wie dick werden die Kuchenstücke, wenn sie möglichst dick sein sollen?

2. Löse die folgenden Aufgaben:



a) ggT (84, 126)

b) ggT (21, 84)

c) ggT (268, 737)

d) ggT (26, 156)

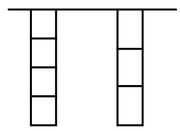
e) ggT (121, 165)

4. Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Auch das Problem des kleinsten gemeinsamen Vielfachen taucht oft auf, denn manchmal interessieren wir uns ja nicht für Teiler, sondern eben für Vielfache von Zahlen.

4.1 Ein Beispiel, das dir helfen soll, das „kgV-Problem“ (die Ausgangslage) zu verstehen:

Du bist stolzer Besitzer von zwei Arten von Bauklötzen. Die einen sind schön rund und haben, wenn du sie aufstellst, eine Höhe von 32cm. Die anderen sind eckig und – ebenfalls aufgestellt – eine Höhe von 48 cm. Nun möchtest du diese Bauklötze so aufeinander stellen, dass du darüber eine horizontale Latte legen kannst. Mit anderen Worten: Du baust ein Tor, dessen erster Pfosten aus den runden und dessen zweiter Pfosten aus den eckigen Bauklötzen besteht. Nun fragt sich natürlich, wie hoch dieses Tor mindestens wird.

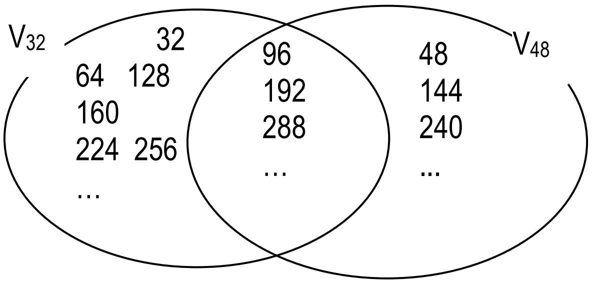


➔ *Du suchst also die Zahl, welche die kleinstmögliche Torhöhe bringt. Oder anders gesagt: Eine Zahl, die ein Vielfaches von 32 und von 48 und die möglichst klein ist.*

Idee: Die gesuchte Zahl ist ganz offensichtlich Vielfaches von 32 und 48. Zudem ist sie der kleinste dieser Vielfachen (also: kleinstes gemeinsames Vielfaches = kgV)

Wir suchen also in den Vielfachenmengen dieser beiden Zahlen:

V_{32} = { 32, 64, 96, 128, 160, 192, …}
V_{48} = { 48, 96, 144, 192, …}



Wir suchen also in den gemeinsamen Teilern von 32 und 48. **Speziell suchen wir das kleinste gemeinsame Vielfache (in diesem Fall 96)**

Lösung: Der eine Torpfosten umfasst also 3 Elemente à je 32 cm (weil 3•32 = 96 oder 96 : 32 = 3) und der zweite Torpfosten ist 2 Elemente à 48cm hoch (weil 2 •48 = 96 oder 96 : 48 = 2).

4.2 Wie bestimme ich das kgV?

Natürlich gibt es auch für die Bestimmung des kgV eine einfachere, schnellere und sichere Methode.

kgV- Bestimmung durch Primfaktorzerlegung

Auch hier brauchen wir die Primfaktorzerlegung. Von der kleinsten Zahl müssen wir alle, von den grösseren Zahlen die zusätzlichen Primfaktoren herausschreiben und schon haben wir das kgV.

Gesucht ist das kgV, wir wollen also wissen, welches die erste Zahl ist, die sowohl in der 32er, als auch in der 48er Reihe auftaucht.

diese Angabe schreiben wir immer dazu!

kgV (32, 48)

$32 = \boxed{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2}$
$48 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3$

$\text{kgV} = \boxed{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2} \bullet 3 = 96$

Vorgehen:

a) Primfaktorzerlegung für die beteiligten Zahlen
b) Multipliziere jetzt **alle Primfaktoren der kleineren Zahl** mit den **zusätzlichen Primfaktoren der grösseren Zahl**

Aufgaben „kgV – Das kleinste gemeinsame Vielfache“

1. Löse die folgende Satzaufgabe:

Du bist unterwegs auf einem riesigen Monument. Auf dieses führen zwei Treppen, eine hat 15 cm hohe Stufen, die andere hat 18cm hohe Stufen. Nun überlegst du, nach wie vielen Stufe du zum ersten Mal wieder auf gleicher Höhe stehst. Finde also heraus, wie viele Stufen du bei beiden Treppen wieder gleich hoch stehst.

2. Löse die folgenden Aufgaben:

a) kgV (84, 126)

b) kgV (21, 15)

c) kgV (134, 737)

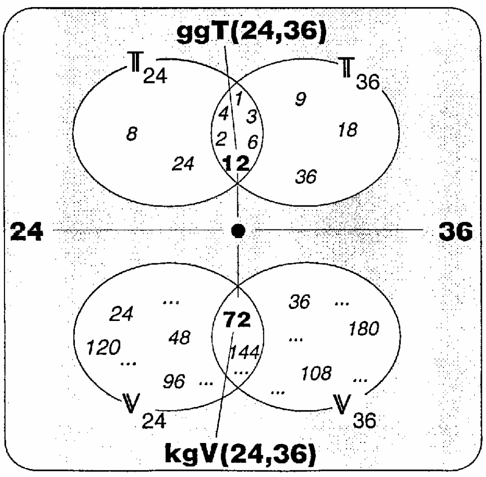
d) kgV (52, 156)

e) kgV (121, 130)

5. Der Zusammenhang zwischen ggT und kgV:

Natürlich hängen der ggT und das kgV auch mit den Zahlen zusammen, von denen man ausgeht.

Wir betrachten zum Beispiel die Zahlen 24 und 36



24	**•**	**36**	**=**	**12**	**•**	**72**
Zahl 1		Zahl 2		ggT		kgV

Das Produkt der beiden Zahlen entspricht also dem Produkt des ggT und des kgV der beiden Zahlen.

Allgemeine Regel (a, b ∈ N)

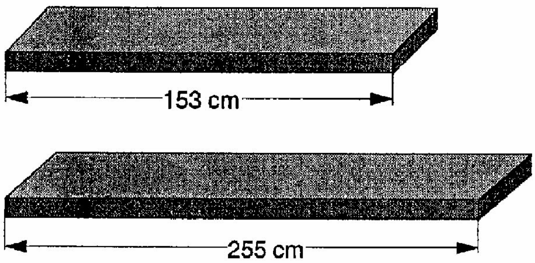
a • b = ggT (a,b) • kgV (a,b)

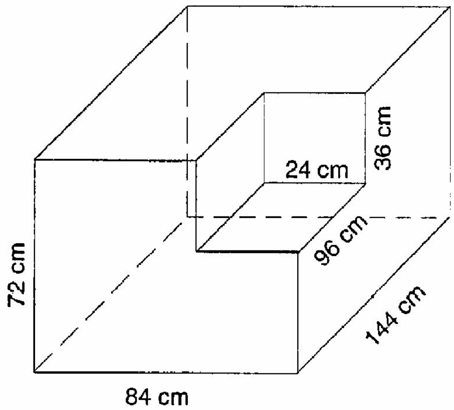
6. Wann verwendest du den ggT, wann brauchst du das kgV?

Sobald du einmal begriffen hast, wann du welche dieser beiden „Formen“ anwenden musst, ist es ein Leichtes, die vielen Aufgaben dazu richtig anzugehen.

ggT

Zerlegen von Dingen in lauter **gleiche, möglichst grosse Teile:**

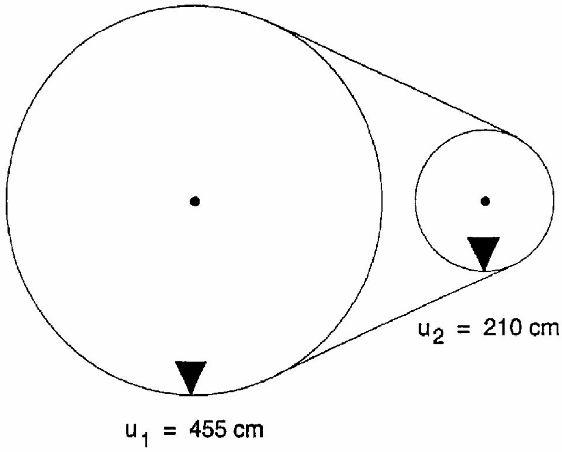




Vollständiges Kürzen von Brüchen:

kgV

Wiedererreichen eines Ausgangszustandes bei regelmässigen (periodischen) Abläufen oder Mustern:



Bestimmen des Hauptnenners (HN) von Brüchen:

1. Gleichnamigmachen:

$$\frac{a+b}{18a}, \quad \frac{c+d}{27c}$$

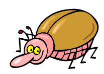
2. Gleichungen mit Bruchtermen lösen: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

Aufgaben „ggT und kgV – Gemischte Aufgaben“

1. Entscheide, ob bei den unten geschilderten Problemen das kgV oder der ggT zum Einsatz kommen:

		ggT	*kgV*	*Grund:*
Bsp:	*Zersägen von verschieden grossen Brettern in gleich grosse Stücke.*	☒	☐	***Zerlegen in gleich grosse Stücke = ggT***
a)	Rasenfläche mit quadratischen Platten belegen. Wie gross kann diese quadratische Platte maximal sein.	☐	☐	
b)	Lampen blinken in verschiedenem Abstand. Wann blinken sie gleichzeitig?	☐	☐	
c)	Zwei verschieden grosse Räder drehen sich. Wann sind sie das erste Mal wieder in der Ausgangsposition?	☐	☐	
d)	Ein Quader mit verschiedener Kantenlänge soll mit Würfelchen ausgefüllt werden. Maximale Länge der Würfelkante?	☐	☐	
e)	Verschiedene Treppen mit unterschiedlicher Stufenhöhe. Wann ist man das erste Mal wieder auf gleicher Höhe?	☐	☐	
f)	Rund um ein Schwimmbad soll ein Weg aus quadratischen Platten gelegt werden. Wie gross dürfen die maximal sein?	☐	☐	
g)	Ein rechteckiges Rasenfeld soll mit möglichst wenigen Schnitten von einem Rasenmäher gemäht werden. Wie breit kann dieser Rasenmäher höchstens sein?	☐	☐	

2. Löse die folgenden Aufgaben:

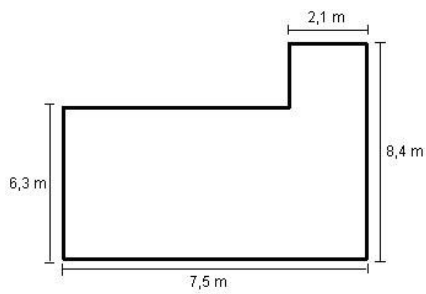


a) Am Bahnhof Rapperswil fahren Züge alle 30 min nach Zürich, alle 42 min nach St. Gallen sowie alle 24 min ein Bus nach Wattwil. Um 12.00 Uhr fahren alle drei Verkehrsmittel gemeinsam ab; Wie lange dauert es, bis sie zum nächsten Mal gleichzeitig fahren?

b) Drei Sportler rennen auf einer kreisförmigen Rennbahn. Zur Bewältigung einer Runde benötigt der Schnellste 32 s, der Mittelschnelle 40 s und der Langsamste 48 s. Alle Läufer starten auf einer Linie; wie lange wird es dauern, bis alle wieder auf einer Linie sind? Gib das Ergebnis in Minuten an.

c) Drei Dachlatten von 1,8 m, 2,52 m und 1,44 m Länge sollen in gleich lange Stücke zersägt werden. Wie lang kann ein Stück höchstens werden und wie viele solcher Stücke erhält man?

d) Der Boden der Garderobe soll mit möglichst wenigen, lauter gleich grossen quadratischen Platten belegt werden, wobei Du eine Lösung suchen sollst, bei der keine Platte zerschnitten werden muss?



e) 450 ist das k.g.V. dreier Zahlen, die durch 15 und 25 teilbar sind. Alle sind kleiner als 450. Wie heissen die drei Zahlen?

f) Christian beobachtet drei tropfende Wasserhähne. Beim ersten löst sich alle 8 Sekunden ein Tropfen ab, beim zweiten alle 12 Sekunden und beim dritten alle 14 Sekunden. Nun lösen sich alle drei Tropfen gleichzeitig. Wie lange dauert es von jetzt an, bis sich zum nächsten Mal alle drei Tropfen gleichzeitig lösen? (Angabe in Sekunden)

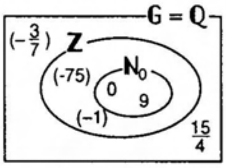
2. Brüche und ihre Eigenschaften

1. Die Menge ℚ (Menge der rationalen Zahlen)

Wieder einmal müssen wir feststellen, dass die Menge ℤ begrenzt ist. Sobald wir nämlich z.B. nach der Lösung der Division 7:9 oder 3:5 suchen, finden wir keine ganze Zahl, die diese Division erfüllt. Die Zahlen der Menge ℤ genügen also nicht, um alle Divisionen zu erklären. ➔ **Wir brauchen dazu eine neue, umfangreichere Grundmenge. Diese heisst: Menge der rationalen (gebrochenen) Zahlen ℚ.**

Wir erweitern unseren Zahlenhorizont also um die neue Menge ℚ. Die bisher bekannten Mengen ℤ, $\mathbb{N}_0$ und ℕ sind Teilmengen von ℚ. Demnach gelten alle Rechengesetze weiterhin.

<u>**Überblick über die Mengen:**</u>



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen zuzüglich der Null

$\mathbb{Z} = \{..., (-2), (-1), 0, 1, 2, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{..., (-\frac{5}{2}), ..., (-2), ..., (-\frac{2}{3}), ..., 0, ..., \frac{1}{2}, ...\}$ Menge der rationalen Zahlen (der Brüche)

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ Die Brüche füllen auf der Zahlengeraden die Lücken zwischen den ganzen Zahlen nicht vollständig!

2. Die Definition des Bruches

Ein Bruch beschreibt den Quotienten zweier ganzen Zahlen a und b ($b \neq 0$).

Es gilt: $a, b \in Z$; $b \neq 0$ ➔ $\boxed{\frac{a}{b}} := a : b$ *Bruch*

<u>Aufbau des Bruches:</u>

$\frac{a}{b}$

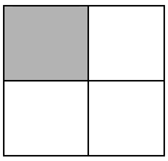
Zähler (zählt, „wie viele„ von diesem Bruchtyp vorliegen)

Bruchstrich (ersetzt das Divisionszeichen)

Nenner (Beschreibt den Typ (Familie) des Bruches. Gibt an, in wie viele Stücke das Ganze ursprünglich geteilt wurde)

Wichtig: $\frac{a+2}{a+3} = (a+2) : (a+3)$ → **Der Bruchstrich ersetzt auch Klammern in Zähler und Nenner.**

3. Der Bruch als Bruchteil des Ganzen



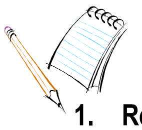
$\frac{1}{4}$ **vom Ganzen** $\frac{4}{5}$ **von 9** $\frac{2}{3}$ **von CHF 60.--**

Das Ganze Das Ganze

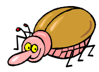
Die Formulierung $\frac{3}{8}$ **von 24** bedeutet also $\frac{3}{8}$ **• 24** = 9 *(„von“ bedeutet also „MAL“)*

Du kannst das selber nachprüfen. $\frac{3}{8} \bullet 24 = (3 : 8) \bullet 24 = 24 : 8 \bullet 3 = 3 \bullet 3 = 9$ (Umformen nach Operatorkonzept)

Definition des Bruches



Aufgaben „Bruchteile vom Ganzen“



1. Rechne aus:

a) $\frac{5}{8}$ von 96 =

b) $\frac{3}{25}$ von 275 =

c)) $\frac{4}{33}$ von 231 =

d) $\frac{6}{11}$ von 96822 =

e) $\frac{2}{8}$ von 56 =

2. Bestimme die gesuchte Zahl:

a) $\frac{1}{4}$ der Zahl ist 6 =

b) $\frac{3}{4}$ von 8 ist gleich der Zahl =

c) $\frac{4}{6}$ der Zahl ist 456. =

d) Die Zahl ist gleich $\frac{2}{3}$ von 27 =

3. Berechne die gesuchten Werte (verwandle immer zuerst in die nächst kleinere Einheit)

Bsp: $\frac{1}{4}$ von 1Stunde = $\frac{1}{4}$ von 60 Minuten = **15 Minuten** *(weil 1 : 4 • 60 = 1• 60 : 4 = 60 : 4 = 15)*

a) $\frac{2}{5}$ von 2 Stunden =

b) $\frac{3}{6}$ von 1 Minute =

c) $\frac{2}{8}$ von 1 m^3 =

d) $\frac{7}{10}$ von 1 ha =

4. Von einer Schulklasse, welche 24 Schüler umfasst, sind 4 Schüler krank

a) Gib die Anzahl der gesunden Schüler als Bruchteil der ganzen Klasse an.

b) Gib die Anzahl der kranken Schüler als Bruchteil der ganzen Klasse an.

c) Gib die Anzahl der kranken Schüler als Bruchteil der gesunden Schüler an.

5. Ein Chor besteht aus 32 Sängerinnen und Sängern. Davon sind $\frac{3}{8}$ Männer.

a) Wie viele Sänger sind Frauen? Gib den Bruchteil an.

b) Eines Tages sind $\frac{2}{6}$ der Männer und $\frac{2}{5}$ der Frauen krank. Wie viele Sänger sind an der Probe anwesend?

6. Schreibe die folgenden Brüche in Divisionsrechnungen um und rechne die Rechnung aus (wenn möglich).

a) $\frac{2}{8}$ =

b) $\frac{21}{7}$ =

c) $\frac{7}{21}$ =

d) $\frac{e+2}{f}$ =

e) $\frac{d+10}{5}$ =

f) $\frac{e}{e+1}$ =

g) $\frac{e+1}{e+1}$ =

h) $\frac{6}{3+g}$ =

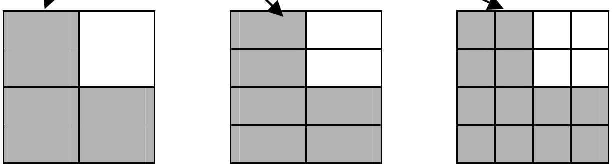
4. Der Bruch als Zahl

Wie wir das von verschieden aussehenden Termen kennen, können auch verschieden aussehende Brüche gleichwertig sein.

•2 •2

z.B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ und $\frac{12}{16}$ sind gleichwertige Brüche. Sie können ineinander überführt werden, bezeichnen also dieselbe Grösse

•2 •2



> **Regel:**
> Wenn der Zähler und der Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert oder dividiert wurden, spricht man von gleichwertigen Brüchen.

Zur Überprüfung kann auch folgendermassen vorgegangen werden;

$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2}$, wenn $z_1 \bullet n_2 = z_2 \bullet n_1$

<u>Achtung:</u> VORZEICHEN beachten!

Wegen den Gesetzen der Division mit negativen Zahlen gilt: $\boxed{\mathbf{(-\frac{a}{b}) = \frac{(-a)}{b} = \frac{a}{(-b)}}}$

5. Verschiedene Typen von Brüchen: Echte und unechte Brüche.

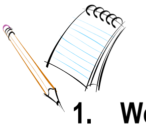
Wir unterscheiden die echten Brüche von den unechten Brüchen, wobei allerdings alle Brüche zugelassen sind. Die Unterscheidung erfolgt nach dem Zähler. Ist er kleiner als der Nenner, so ist der Bruch ein „echter Bruch“. Sobald der Zähler grösser oder gleich dem Nenner ist, spricht man von einem „unechten Bruch“.

Echte Brüche	**Stammbrüche**	haben immer den Zähler 1	z.B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, etc.
	Echte Brüche	Zähler < Nenner	z.B. $\frac{1}{3}, \frac{27}{421}, \frac{2}{6}$, etc

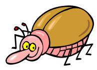
unechte Brüche	**unechte Brüche**	Zähler ≥ Nenner	z.B. $\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{18}{16}$, etc
	gemischte Zahl		z.B. $2\frac{2}{7}$
	Scheinbruch	Nenner ist Teiler des Zählers	z.B. $\frac{4}{4}, \frac{12}{6}, \frac{27}{9}$, etc

zudem:	**Dezimalbruch**	Nenner ist Vielfaches von 10 (Nenner $\in V_{10}$)	z.B. $\frac{3}{10}, \frac{6}{100}, \frac{18}{1000}$, etc

Wenn wir Rechnungen lösen, so lassen wir eigentlich keine unechten Brüche stehen, sondern verwandeln diese auf jeden Fall in gemischte Zahlen. So haben wir den Überblick besser, wie gross das Ergebnis wirklich ist.



Aufgaben „Brüche - Einführung“



1. **Welche Vorzeichen musst du für den Platzhalter einsetzen, damit die Aussage wahr wird? Gib alle möglichen Lösungen an.**

   a) $\frac{(-4)}{(-7)} = \square\,\frac{4}{7}$ $\square =$ ....

   b) $\frac{5}{(-7)} = \frac{(\square\,5)}{(\triangle\,7)}$ = $\square =$ .... $\triangle =$ __________

   c) $\frac{(-3)}{8} = \frac{3}{(\triangle 8)}$ = $\triangle =$ __________

   d) $\frac{5}{8} = \frac{(\square\,5)}{(\triangle\,8)}$ = $\square =$ .... $\triangle =$ __________

   e) $\frac{5}{(-8)} = \square\,\frac{(\triangle\,5)}{(\square\,8)}$ = $\square =$ .... $\triangle =$ ....

2. **Rechne die folgenden Quotienten soweit wie möglich aus und schreibe sie dann als möglichst einfachen Bruch.**

   a) $(f \bullet 8) : 4$ = __________

   b) $(2b - b) : (4a - 3a)$ = __________

   c) $(8f^2 : 4f) : (2e \bullet e)$ = __________

   d) $[\,(-21) - (-46)\,] : [\,6 + (-18)]$ = ...

3. **Welche Bruchterme sind gleichwertig?**

   A $\frac{(-4)-4}{3 \bullet 2}$ B $\left(-\frac{(16:2)}{(-12)}\right)$ C $\frac{3+5}{(-10)-(-4)}$ __________

4. **Schreibe die folgenden Brüche in möglichst einfacher Form:**

   a) $\frac{(-2)-4}{2 \bullet 2}$ = ...

   b) $\frac{(-2) \bullet 2 \bullet (-2)}{25+(-21)-(-4)}$ = ...

   c) $\frac{(-13)-12}{15+(-14)}$ = ...

   d) $\frac{(-2) \bullet (-27)}{3+(-3)+9}$ = ...

Notizen / Bemerkungen

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Erweitern und Kürzen

1. Erweitern von Brüchen

Das Erweitern hat grosse Bedeutung beim Vergleichen von Brüchen, aber auch beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen. Erweitern ist eigentlich eine ganz einfache Sache, man muss einfach den ganzen Zähler und den ganzen Nenner mit der genau gleichen Zahl multiplizieren. Dadurch entsteht ein Bruch, dessen Wert genau gleich ist, der aber in Zähler und Nenner ein mit dem entsprechenden Faktor multiplizierten (erweiterten) Term aufweist.

Wenn wir den Zähler und den Nenner mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren, spricht man von **Erweitern.**

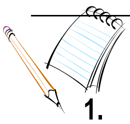
hier erweitern wir den Bruch (Zähler und Nenner) mit 3

Beispiel: $\frac{5}{9} = \frac{5 \bullet 3}{9 \bullet 3} = \frac{15}{27}$ *Entsprechend müssen wir also Zähler und Nenner mit 3 multiplizieren.*

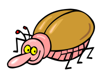
Beim Erweitern muss man sehr aufpassen, dass man wirklich **die ganzen Zähler und ganzen Nenner multipliziert.** Denn wir wissen ja: **Der Bruchstrich ersetzt Klammern**, darum müssen wir vor dem Multiplizieren diese Klammern wieder setzen.

Bruchstrich ersetzt Klammern! *Der ganze Zähler (und der ganze Nenner) wird jetzt mit 3 multipliziert.*

Beispiel: $\frac{a+2}{a+3} = \frac{(a+2)}{(a+3)} = \frac{(a+2) \bullet 3}{(a+3) \bullet 3} = \frac{3 \bullet a + 3 \bullet 2}{3 \bullet a + 3 \bullet 3} = \mathbf{\frac{3a+6}{3a+9}}$



Aufgaben „Erweitern von Brüchen“



1. Vervollständige die folgende Tabelle:

	Erweitern mit / Bruch	3	12	(-5)	(-2)
a)	$\frac{6}{8}$				
b)	$\frac{9}{11}$				
c)	$\frac{2}{a+1}$				
d)	$\frac{b+6}{3}$				
e)	$\frac{a+4}{a-2}$				

2. Erweitere den Bruch so, dass die angegebenen Bedingung erfüllt ist.

	Gegeben:	Bedingung:	neuer Bruch
a)	$\frac{4}{5}$	Der Nenner ist 15	
b)	$\frac{5}{9}$	Der Zähler ist (-25)	
c)	$\frac{3}{a-1}$	Der Zähler ist (-42)	
d)	2	Der Nenner ist 12	
e)	$\frac{14}{2}$	Der Zähler ist 196	

3. Erweitere so, dass der neuen Bruch einen Nenner von $12ab^2$ hat. Gib den Term an, mit dem du erweiterst.

	Gegebener Bruch	Erweitert mit:	neuer Bruch
	$\frac{3}{a}$		
	$\frac{4}{2ab}$		
	$\frac{12}{6b}$		

2. Kürzen von Brüchen

Das Kürzen ist das Gegenteil von Erweitern. Beim Kürzen versucht man, die Zahlen möglichst klein zu machen. Wir müssen also den Zähler und den Nenner durch die gleiche Zahl dividieren ($\neq 0$). In der Regel dividieren wir dabei durch den ggT von Zähler und Nenner.

Zähler und Nenner kürzen mit 3, denn 3 ist ggT(9, 12)

Beispiel: $\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$ andere Schreibweise: $\frac{9}{12} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{3}{4}$

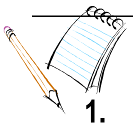
man streicht die Faktoren durch, welche man durch den gleichen Term dividiert. Das Ergebnis dieser Division wird klein darüber geschrieben. *Hier wird Zähler und Nenner mit 3 dividiert, dabei gibt 9:3 = 3 und 12:3 = 4*

Achtung: Kürzen ist nur möglich, wenn Zähler und Nenner als Produkt geschrieben sind. („*Nur der Dumme kürzt die Summe*") Dabei ist wieder zu beachten, dass der Bruchstrich Klammern ersetzt. Zudem kann jede Summe oder Differenz durch **AUSKLAMMERN** jederzeit in ein Produkt verwandelt werden (notfalls klammert man die Zahl 1 aus).

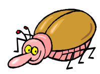
Beispiel: a) $\frac{a - 2}{2a - 4} = \frac{1(a - 2)}{2(a - 2)} = \frac{1\overset{1}{\cancel{(a - 2)}}}{2\underset{1}{\cancel{(a - 2)}}} = \frac{1}{2}$

durch Ausklammern werden alle Summen/Differenzen in Produkte verwandelt

b) $\frac{6x - 2}{6x} = \frac{2(3x - 1)}{6x} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(3x - 1)}{\underset{3}{\cancel{6}}x} = \frac{3x - 1}{3x}$



Aufgaben „Kürzen von Brüchen"



1. Kürze die folgenden Brüche so weit wie möglich:

Bsp: $\frac{12}{42} = \frac{2 \bullet \overset{1}{\cancel{6}}}{7 \bullet \underset{1}{\cancel{6}}} = \frac{2}{7}$. Kurzform: $\frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{6}{\cancel{42}}} = \frac{2}{7}$ *Grund: ggT(12, 42) = 6* $\frac{15a}{9ab} = \frac{5 \bullet \overset{1}{\cancel{3}} \bullet \overset{1}{\cancel{a}}}{3 \bullet \underset{1}{\cancel{3}} \bullet \underset{1}{\cancel{a}} \bullet b} = \frac{5}{3b}$. Kurzform: $\frac{\overset{5}{\cancel{15}}\overset{1}{\cancel{a}}}{\underset{3}{\cancel{9}}\underset{1}{\cancel{a}}b} = \frac{5}{3b}$ *Auch Variablen kürzen*

a) $\frac{375}{875} =$ ....

b) $\frac{75}{125} =$ ....

c) $\frac{57}{190} =$ ....

d) $\frac{82}{123} =$ ....

e) $\frac{105}{360} =$ ....

f) $\frac{34}{51} =$ ....

g) $\frac{21}{77} =$ ....

h) $\frac{6a}{9} =$ ....

i) $\frac{39a}{65b} =$ ....

j) $\frac{17ab}{27bc} =$ ....

k) $\frac{ef^2g}{4fg^2} =$ ....

l) $\frac{4(m + n)}{7(m + n)} =$ ....

m) $\frac{(4r + s)^2}{(4r + s)} =$ ....

n) $\frac{18\,(e + 3f)}{24\,(3f + e)} =$ ....

o) $\frac{12xyz}{15xz} =$ ....

p) $\frac{25ac}{5c} =$ ....

2. Kürze die folgenden Brüche so weit wie möglich:

Bsp: $\frac{\cancel{15}^{3}\cdot\cancel{40}^{\cancel{10}^{1}}}{\cancel{20}_{4}\cdot\cancel{10}_{1}\cdot\cancel{4}_{1}} = \frac{3}{4}$. *Zuerst 40 mit 4 kürzen, dann die 10 mit den entstanden 10 kürzen. Dann noch 15 und 20 mit 5 kürzen. Es bleiben 3 und 4 übrig.→ man kann also auch beim Kürzen entstandene Faktoren zum Weiterkürzen verwenden.*

a) $\frac{21\cdot12\cdot30}{7\cdot6\cdot15} =$ ....

f) $\frac{42\cdot15}{12\cdot35} =$ ....

b) $\frac{12\cdot18\cdot2}{24\cdot4\cdot9} =$ ....

g) $\frac{36\cdot15}{25\cdot12\cdot8} =$ ....

c) $\frac{3\cdot5\cdot11}{33\cdot9\cdot25} =$ ....

h) $\frac{12\cdot111}{37\cdot84} =$ ....

d) $\frac{24\cdot3\cdot19}{38\cdot72} =$ ....

i) $\frac{91\cdot3\cdot17}{65\cdot51} =$ ....

e) $\frac{30}{2\cdot6\cdot10} =$ ....

3. Kürze die folgenden Brüche so weit wie möglich, beachte aber, dass du NUR PRODUKTE kürzen darfst.

Bsp 1 $\frac{8\cdot5+(-6)}{12+5} = \frac{40+(-6)}{12+5} = \frac{\cancel{34}^{2}}{\cancel{17}_{1}} = \mathbf{2}$

Achtung: Obwohl die beiden 5en in Zähler und Nenner verlockend zum Kürzen einladen, ist dies VERBOTEN, denn es darf erst gekürzt werden, wenn Zähler und Nenner in Produktform vorliegen!

Bsp 2 $\frac{15a+10b}{6a+4b} = \frac{5\cancel{(3a+2b)}^{1}}{2\cancel{(3a+2b)}_{1}} = \frac{5}{2}$

Achtung: Hier gilt das genau Gleiche: Zuerst durch Ausklammern Zähler und Nenner als Produkt schreiben. Dann können gemeinsame Faktoren gekürzt werden (Hier wird also mit (3a + 2b) gekürzt)

a) $\frac{25+15}{25} =$ ....

f) $\frac{24x-16xy}{33a-22ay} =$ ....

b) $\frac{(-14)+(-12)}{7} =$ ....

g) $\frac{60c-40d}{20c} =$ ....

c) $\frac{(-14)+3}{14-3} =$ ....

h) $\frac{25}{5x+10} =$ ....

d) $\frac{15\cdot3+3}{9} =$ ....

i) $\frac{105m+15}{15} =$ ....

e) $\frac{(-6)+2\cdot4}{2\cdot3-(3+1)} =$ ....

j) $\frac{2x+6}{2} =$ ....

Bemerkungen / Notizen:

4. Die Ordnung von rationalen Zahlen

1. Vergleichen und ordnen von rationalen Zahlen

Wir können Brüche nur dann vergleichen und ordnen, wenn ihre Zähler oder Nenner gleich sind. Alles andere geht nicht.

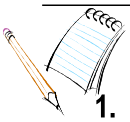
Wenn du zum Beispiel $\frac{4}{7}$ und $\frac{14}{23}$ vergleichen sollst, wirst du ziemlich ratlos dastehen. Vielleicht nimmst du den Taschenrechner zur Hilfe, doch das ist keine gute Lösung. Wenn du es aber schaffst, die Zähler oder Nenner dieser beiden Brüche gleich zu machen, dann kannst du herausfinden, welcher dieser Brüche grösser ist.

$\frac{4}{7}$ und $\frac{4}{23}$ kannst du vergleichen, es ist klar, dass die Zahl mit dem kleineren Nenner die grössere Zahl ist (denn man teilt das Ganze nur in 7 Teile, während man beim zweiten Bruch 23 Teile aus dem Ganzen macht. Somit sind bei den 7-teln die einzelnen Teile grösser, bei den 23-teln sind sie kleiner.

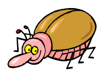
Zudem kannst du auch Brüche wie $\frac{6}{21}$ und $\frac{13}{21}$ vergleichen. Hier ist die Zahl mit dem grösseren Zähler natürlich auch grösser, denn bei beiden Brüchen wird das Ganze in 21 Teile geteilt, von denen man dann unterschiedlich viel vorliegen hat. Beim ersten Bruch nimmt man 6 solcher Teile, beim zweiten 13. Demnach ist der Bruch mit 13 Teilen natürlich grösser.

Es gilt also:

Gleiche Zähler:	**Je grösser der Nenner, desto kleiner die Zahl** (weil das Ganze in mehr Stücke geteilt wird).
Gleiche Nenner:	**Je grösser der Zähler, desto grösser die Zahl** (weil von den bestimmten Stücken mehr vorhanden sind).



Aufgaben „Ordnen und Vergleichen von Brüchen“



1. Ordne die folgenden Brüche mit Hilfe des Zeichens „<“ der Grösse nach (Beginne also mit dem Kleinsten)

a) $\frac{7}{15}; \frac{7}{18}; \frac{7}{12}; \frac{7}{9}; \frac{7}{29}; \frac{7}{10}; \frac{7}{8}; \frac{7}{90}$ ....

b) $\frac{7}{31}; \frac{2}{31}; \frac{14}{31}; \frac{3}{31}; \frac{29}{31}; \frac{25}{31}; \frac{11}{31}; \frac{35}{31}$ ....

2. Ordne die folgenden Brüche mit Hilfe des Zeichens „>“ der Grösse nach (Beginne also mit dem Grössten)

a) $\frac{4}{21}; \frac{4}{19}; \frac{4}{5}; \frac{4}{9}; \frac{4}{3}; (-\frac{4}{10}); (-\frac{4}{6})$ ....

b) $(-\frac{7}{17}); \frac{2}{17}; \frac{14}{17}; (-\frac{9}{17}); \frac{16}{17}; (-\frac{13}{17})$ ....

3. Setze von den Zeichen < , = , > das Richtige ein, damit eine wahre Aussage entsteht.

a) $\frac{(-4)}{6} \square \frac{4}{(-6)}$ $\square$ = ...

b) $(-\frac{12}{67}) \square (-\frac{12}{19})$ $\square$ = ...

c) $\frac{(-4)}{98} \square \frac{(-8)}{98}$ $\square$ = ...

d) $\frac{13}{18} \square \frac{12}{(-17)}$ $\square$ = ...

e) $(-\frac{4}{5}) \square (-\frac{8}{9})$ $\square$ = ...

f) $\frac{(-6)}{(-8)} \square \frac{3}{4}$ $\square$ = ...

g) $\frac{15}{13} \square \frac{19}{17}$ $\square$ = ...

h) $\frac{(-8)}{15} \square \frac{15}{(-22)}$ $\square$ = ...

Bemerkungen / Notizen:

....

....

....

....

5. Brüche gleichnamig machen

Damit wir auch Brüche vergleichen / ordnen können, die nicht über einen gleichen Nenner oder Zähler verfügen, brauchen wir einen Trick. Dieser Trick ist ein eigentlich ganz einfacher Schritt:
Weil das Vergleichen von Brüchen mit gleichen Nennern am Einfachsten ist, sorgen wir dafür, dass alle Nenner gleich sind. **Gleiche Nenner schaffen heisst „gleichnamig machen“** (→ „Brüche des selben Typs, der selben Familie erzeugen“) Das bedeutet also nichts anderes, als dass wir beide Brüche erweitern müssen, damit am Schluss die beiden Nenner gleich sind. **Dieser gleiche Nenner heisst Hauptnenner (Er ist das kgV der ursprünglichen Nenner)**

Vorgehen beim Gleichnamigmachen:
1. Bestimmen des gemeinsamen Hauptnenners (HN) (HN = kgV der beiden Nenner)
2. Bestimmen des Erweiterungsfaktors, mit dem wir die einzelnen Brüche erweitern müssen.
3. Gleichnamigmachen durch erweitern mit dem entsprechenden Faktor.

<u>Beispiele:</u>

Erweitern mit 7, weil **7**•9 = 63

Erweitern mit 3, weil **3**•21 = 63

$\frac{7}{9}$; $\frac{18}{21}$ ➔ HN = kgV(9, 21) = 63 ➔ $\frac{7 \bullet 7}{9 \bullet 7}$; $\frac{18 \bullet 3}{21 \bullet 3}$ ➔ $\mathbf{\frac{49}{63}}$; $\mathbf{\frac{46}{63}}$

Erweitern mit 3b, weil **3b**•2a = 6ab

Erweitern mit 2a, weil **2a**•3b = 6ab

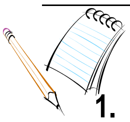
$\frac{b}{2a}$; $\frac{a}{3b}$ ➔ HN = kgV(2a, 3b) = 6ab ➔ $\frac{b \bullet 3b}{2a \bullet 3b}$; $\frac{a \bullet 2a}{3b \bullet 2a}$ ➔ $\mathbf{\frac{3b^2}{6ab}}$; $\mathbf{\frac{2a^2}{6ab}}$

Erweitern mit 5, weil **5**•3 = 15

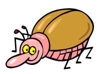
Erweitern mit 3, weil **3**•5 = 15

$\frac{3+x}{3}$; $\frac{5-y}{5}$ ➔ HN = kgV(3, 5) =15 ➔ $\frac{(3+x) \bullet 5}{3 \bullet 5}$; $\frac{(5-y) \bullet 3}{5 \bullet 3}$ ➔ $\mathbf{\frac{5(3+x)}{15}}$; $\mathbf{\frac{3(5-y)}{15}}$

Achtung, beim Erweitern wieder daran denken, dass Bruchstrich Klammern ersetzen, also vor dem Multiplizieren wieder Klammern schreiben.



Aufgaben „Brüche gleichnamig machen“



1. Bestimme den Hauptnenner und mache die Brüche gleichnamig:

a) $\frac{a}{6}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{a-1}{15}$ HN: ____________

b) $\frac{12}{14}$; $\frac{18}{21}$; $\frac{34}{42}$ HN: ____________

2. Mache die Brüche gleichnamig und ordne sie der Grösse nach (mit Hilfe des Zeichens „>“)

a) $\frac{6}{9}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{11}{15}$; $\frac{7}{10}$ ____________

b) $\left(-\frac{5}{6}\right)$; $\frac{3}{5}$; $\frac{13}{15}$; $\left(-\frac{8}{9}\right)$; $\frac{14}{18}$ ____________

3. Bestimme den Hauptnenner und mache die Brüche gleichnamig:

a) $\frac{ab}{6}$; $\frac{bc}{4}$ HN = ____________

b) $\frac{16}{2x}$; $\frac{12}{3}$ HN = ____________

c) $\frac{11}{ab}$; $\frac{17}{bc}$ HN = ____________

d) $\frac{a+3}{3}$; $\frac{b-2}{5}$ HN = ____________

e) $\frac{x-4}{5a}$; $\frac{x+3}{3b}$ HN = ____________

f) $\frac{f-r^2}{ef^2}$; $\frac{e+r}{ef}$ HN = ____________

g) $\frac{e-t}{3b^2}$; $\frac{e+k}{4b}$ HN = ____________

h) $4x - 3$; $\frac{2x-4}{3}$ HN = ____________

6. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Genau wie in den Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ können die Grundoperationen auch in der Menge $\mathbb{Q}$ durchgeführt werden. Es gelten natürlich die gleichen Regeln, Gesetze und Hilfsmittel, wie in $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$. Das grosse Problem stellt sich aber sofort dann, wenn man beim Addieren oder Subtrahieren über Brüche verfügt, die nicht vergleichbar sind. Denn wie soll man auf eine sinnvolle Art und Weise „Apfel und Birnen" oder eben Bruchteile ganz verschiedener Art addieren? Logisch, man macht die Brüche gleichnamig und kann dann die Zähler addieren. Achtung: Die Nenner verändern sich natürlich nicht, denn die Nenner bezeichnen ja, in wie viele Teile das Ganze zerteilt wurde (oder bezeichnen den Typ, die Familie des Bruches).

Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen ist eine wichtige Grundoperation. Damit sie funktioniert, müssen die Bruchterme alle GLEICHNAMIG gemacht werden, damit man dann <u>die Zähler addieren / subtrahieren</u> kann.

<u>Beispiele:</u>

$$\frac{7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{(7+5)}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

Sobald gleiche Nenner vorhanden sind,
NUR DIE ZÄHLER ADDIEREN

oder

$$\frac{7}{4}+\frac{5}{8}=\frac{14}{8}+\frac{5}{8}=\frac{(14+5)}{8}=\frac{19}{8}$$

Damit die Brüche verglichen werden können, braucht es **gleich grosse Stücke (=gleiche Nenner)**, also **gleichnamig** machen.

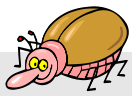
Beim Gleichnamig – Machen ist es wichtig, dass man **ZÄHLER UND NENNER mit der entsprechenden Zahl erweitert (=multipliziert)**. Dabei muss der ganze Zähler erweitert werden (→ *denk dran, den Zähler immer in Klammern zu schreiben*).

Wenn die Brüche gleichnamig gemacht sind, wird die ganze Operation auf einen Bruchstrich geschrieben (Achtung, unbedingt Klammern setzen) **und man muss nur noch im Zähler addieren oder subtrahieren**.

Übungen / Beispiele „Addition und Subtraktion von Brüchen"

1. Bestimme den Hauptnenner und rechne soweit wie möglich auf:

<u>Beispiel:</u>



	Aufgabe		Hauptnenner
	$5x-\frac{y-x}{x}$	$=\frac{5x\cdot x}{x}-\frac{y-x}{x}=\frac{5x^2-(y-x)}{x}=\frac{5x^2-y+\mathbf{x}}{x}$	**x**
a)	$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$		
b)	$\frac{5}{a}-\frac{3}{b}$		
c)	$\frac{5a-2b}{2}+b$		
d)	$\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}-\frac{1}{abc}$		
e)	$\frac{i}{72}-\frac{i}{48}+\frac{i}{15}$		
f)	$\frac{5}{8}+\frac{(-2)}{3}-\frac{3}{5}$		
g)	$\frac{p-q}{3}-\frac{p+q}{3}$		
h)	$\frac{2b}{ab^2}+\frac{2a}{a^2b}$		
i)	$\frac{3a}{a^2x}-\frac{9}{ax^2}$		

2. Bestimme den Hauptnenner und rechne soweit wie möglich auf *(Achtung, manchmal musst du im Nenner zuerst Ausklammern, damit du den Hauptnenner findest)*:

Hauptnenner

Beispiel:

$$\frac{4}{x} - \frac{x+y}{x^2-3x} = \frac{4}{x} - \frac{x+y}{x(x-3)} = \frac{4(x-3)}{x(x-3)} - \frac{x+y}{x(x-3)} = \frac{4x-12-(x+y)}{x(x-3)} = \frac{3x-y-12}{x(x-3)}$$

Hauptnenner: x(x-3)

k) $\frac{4x}{x-y} - \frac{y+x}{2x-2y}$

l) $\frac{10}{2x-1} + \frac{4}{4x-2} - \frac{3}{8x-4}$

m) $\frac{4x}{x-y} - \frac{y}{2x-2y}$

n) $\left(a - \frac{b}{12} + \frac{c}{8}\right) - \left(a + \frac{b}{8} - \frac{c}{12}\right)$

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

7. Multiplikation und Division von Bruchtermen

1. Multiplikation von Bruchtermen

Genau wie bei der Multiplikation in $\mathbb{N}0$ oder $\mathbb{Z}$ stellen wir uns auch in $\mathbb{Q}$ die Multiplikation als das Aufspannen einer Fläche vor, wobei wir dann durch die Multiplikation von „Länge mal Breite" herausfinden, wie gross diese Fläche ist. Somit kommt es also nicht darauf an, dass beide Faktoren gleichartige Brüche sind. Entsprechend muss man für die Multiplikation nicht gleichnamig machen. Dafür muss man aber die Zähler miteinander multiplizieren und ebenfalls die Nenner miteinander multiplizieren.

Bei der Multiplikation von Bruchtermen gilt also: Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.

Am Schluss darfst du nicht vergessen, dass du eventuell wieder kürzen kannst.

<u>Beispiele:</u>

Zähler • Zähler

Nenner• Nenner

Wenn möglich kürzen

$$\frac{9}{16}\bullet\frac{4}{21} = \frac{9\bullet4}{16\bullet21} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\bullet\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{4}{\cancel{16}}\bullet\underset{7}{\cancel{21}}} = \mathbf{\frac{3}{28}}$$

Zähler • Zähler

Nenner• Nenner

Wenn möglich kürzen

$$\frac{9}{16}\bullet 4 = \frac{9}{16}\bullet\frac{4}{\mathbf{1}} = \frac{9\bullet4}{16\bullet1} = \frac{9\bullet\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{4}{\cancel{16}}\bullet1} = \mathbf{\frac{9}{4}}$$

ganze Zahl als Bruch
mit Nenner 1 schreiben!

<u>Vorgehen Multiplikation von Brüchen:</u>

1. **Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multiplizieren.**
2. **evt. Kürzen**

Bei der Multiplikation und Division von Bruchtermen musst du NICHT GLEICHNAMIG MACHEN!

2. Division von Bruchtermen

<u>a) Der Begriff der Kehrzahl:</u>

Als neuen Begriff verwenden wir in der Menge $\mathbb{Q}$ den Begriff der „**Kehrzahl**". Die Kehrzahl eines Bruchs erhält man durch **Vertauschen von Zähler und Nenner**.

$$\frac{9}{4} \rightarrow \frac{4}{9} \quad \text{und} \quad \frac{a}{3} \rightarrow \frac{3}{a}$$

Achtung: Die Begriffe Kehrzahl und Gegenzahl sind nicht das Gleiche und darum nicht zu verwechseln.

<u>b) Division von Brüchen</u>

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation. Und auch für die Division gibt es klare, eindeutige Regeln. Um diese verstehen zu können, brauchen wir zuerst die Betrachtung der folgenden Beispiele:

$$28:\frac{4}{7} = 28:(4:7) = 28:4\bullet7 = 28\bullet7:4 = 28\bullet(7:4) = 28\bullet\frac{7}{4} = \frac{28\bullet7}{4}$$

Definition Bruch *Klammern auflösen* *Operator-Konzept* *Def. Bruch* *Multiplikation Bruch*

$$\frac{3}{5}:\frac{9}{25} = (3:5):(9:25) = 3:5:9\bullet25 = 3\bullet25:5:9 = (3\bullet25):(5\bullet9) = \frac{3\bullet25}{5\bullet9} = \frac{3}{5}\bullet\frac{25}{9} = \frac{5}{3}$$

Division durch einen Bruch heisst: Multiplikation mit der Kehrzahl!

Weitere Beispiele:

statt dividieren mit der Kehrzahl multiplizieren!

$$28 : \frac{4}{7} = \frac{28}{1} : \frac{4}{7} = \frac{28}{1} \bullet \frac{7}{4} = \frac{28 \bullet 7}{4 \bullet 1} = \frac{49}{1} = 49$$

ganze Zahl immer mit Nenner 1 schreiben! *hier kannst du kürzen*

$$\frac{4}{7} : 28 = \frac{4}{7} : \frac{28}{1} = \frac{4}{7} \bullet \frac{1}{28} = \frac{4 \bullet 1}{28 \bullet 7} = \frac{1}{49}$$

statt dividieren mit der Kehrzahl multiplizieren!

$$\frac{3}{5} : \frac{9}{25} = \frac{3}{5} \bullet \frac{25}{9} = \frac{3 \bullet 25}{5 \bullet 9} = \frac{5}{3}$$

c) Doppelbrüche

Doppelbrüche sehen zwar besonders kompliziert aus, doch eigentlich sind sie nichts anderes, als die Darstellung der Division von zwei Bruchtermen.

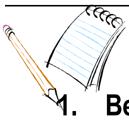
Der Doppelbruch $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}}$ bedeutet eigentlich nichts anderes als: $\frac{3}{4} : \frac{9}{16}$, also $\frac{3}{4} \bullet \frac{16}{9} = \frac{3 \bullet 16}{4 \bullet 9} = \mathbf{\frac{4}{3}}$

Bei Doppelbrüchen ersetzt der Hauptbruchstrich (der längste Bruchstrich) das Divisionszeichen.

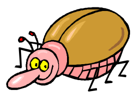
Vorgehen Division von Brüchen:

1. **Anstelle des Divisoren** (die Zahl nach dem :) **schreibst du die Kehrzahl hin.**
2. **Ersetze das Divisionszeichen (:) durch ein Multiplikationszeichen (•)**
3. **Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multiplizieren.**
4. **evt. Kürzen** (Denk daran: „Nur der Dumme kürzt die Summe!“)

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*



Übungen / Beispiele „Multiplikation und Division von Brüchen“



1. Bestimme den Hauptnenner und rechne soweit wie möglich aus:

<u>Beispiel:</u> *(Anstelle der Division schreiben wir die Multiplikation mit der Kehrzahl und rechnen aus)*

$\frac{3}{5} : \frac{7}{11}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} \bullet \frac{11}{7} = \frac{3 \bullet 11}{5 \bullet 7} = \mathbf{\frac{33}{35}}$

a) $\frac{36}{19} \bullet \frac{17}{12}$

b) $\frac{42}{25} : 36$

c) $\frac{2x}{21} \bullet 5$

d) $\frac{6}{7} \bullet \frac{7}{6x}$

e) $\frac{6}{7} : \frac{6x}{7}$

f) $\frac{119}{21} : 34$

g) $\dfrac{\frac{121}{169}}{\frac{143}{156}}$

h) $\frac{15}{17} : \frac{15}{(-17)}$

i) $(-17) : \frac{17}{13}$

j) $c \bullet \frac{bd}{c}$

k) $\frac{4a}{x} \bullet \frac{(-b)}{2x}$

l) $\frac{4(c-d)}{a} : \frac{8c}{a}$

m) $\frac{4(a+b)^2}{5x} \bullet \frac{25x^2}{a+b}$

n) $\dfrac{\frac{24}{7}}{\frac{15}{14}}$

o) $\frac{27x}{4y} : \frac{(-18z)}{5w} \bullet 4$

p) $\frac{46pq}{3x} : \frac{69q}{9x} \bullet \frac{2r}{2x}$

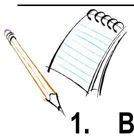
8. Gemischte Operationen mit Bruchtermen

Bei gemischten Operationen musst du immer daran denken, dass die allgemeinen Rechenregeln gelten:

Du rechnest von links nach rechts, mit folgenden Ausnahmen

1. **Klammern zuerst**
2. **Höhere Operationen zuerst (Also Punkt vor Strich)**

Zudem musst du daran denken, den Zähler eines Bruches immer mit Klammern zu schreiben.



Übungen / Beispiele „Gemischte Operationen mit Brüchen“

1. Bestimme den Hauptnenner und rechne soweit wie möglich aus:

Beispiel: (Zuerst ausmultiplizieren, danach addieren (gleichnamig machen!)). Also Punkt vor Strich!

$$\frac{x}{7} + 2\left(\frac{x}{14} + \frac{1}{8}\right) = \frac{x}{7} + \frac{2x}{14} + \frac{2}{8} = \frac{\mathbf{8x}}{56} + \frac{\mathbf{8x}}{56} + \frac{\mathbf{14}}{56} = \frac{16x+14}{56} = \frac{2(8x+7)}{56} = \frac{8x+7}{28}$$

a) $\frac{(e+f)}{4} \cdot \frac{5}{4} - \frac{2(e+f)}{8}$

b) $\frac{7x}{4} - \frac{6}{5}\left(\frac{10x}{9} + \frac{1}{3}\right)$

c) $\frac{5x}{3} - \frac{7}{12}\left(\frac{4x}{21} + \frac{3}{7}\right)$

d) $3 \cdot \frac{7}{9} - 6\left(\frac{11x}{9} - \frac{x}{6}\right)$

e) $2 \cdot \frac{7x}{4} - \frac{6x}{5}$

f) $\frac{3x}{4} - 3 \cdot \frac{6}{5}\left(\frac{2x}{10} + \frac{1}{3}\right)$

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

9. Gleichungen mit Bruchtermen

Zum Thema Gleichungen findest du im Dossier „Rechnen mit Zahlvariablen“ alle nötigen Grundinformationen. So bleibt natürlich auch die Grundidee des Lösens von Gleichungen natürlich auch in $\mathbb{Q}$ die Gleiche.

> **<u>Allgemeines Lösungsschema:</u>**
> 1. Termvereinfachungen
> 2. Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen.
> 3. Lösungsmenge angeben

Für Gleichungen mit Bruchtermen genügt dieses Schema aber nicht, denn die verschiedenen Nenner stören und verunmöglichen das Auflösen der Gleichung. Also müssen wir noch zusätzliche Schritte vornehmen, der Wichtigste dabei ist die „Multiplikation mit dem Hauptnenner“. Diese hat den Effekt, dass alle Nenner wegfallen und die Gleichung „nennerfrei“ wird, also mit dem uns bekannten Schema gelöst werden kann.

Zur Multiplikation mit dem Hauptnenner:

Die Multiplikation mit dem Hauptnenner erfolgt nur darum, damit alle Nenner aus der Gleichung wegfallen. Denn nur dann können wir die uns bekannten Gesetze anwenden (Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen)

Bevor du aber mit dem Hauptnenner multiplizierst, musst du ALLE VEREINFACHUNGEN, die möglich sind, vornehmen.

Das allgemeine Lösungsschema wird also erweitert und sieht nun so aus:

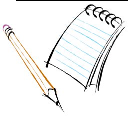
> **<u>Erweitertes allgemeines Lösungsschema:</u>**
>
> 1. Termvereinfachungen
> 2. Multiplikation mit dem Hauptnenner
> 3. Termvereinfachungen
> 4. Isolieren der Lösungsvariable durch Äquivalenzumformungen.
> 5. Lösungsmenge angeben

Sobald du aber multiplizierst, musst du jeden einzelnen Zähler links und rechts der Gleichung mit dem entsprechenden Faktoren multiplizieren. **Du erkennst diese einzelnen Stücke daran, dass sie durch ein „ + “ oder ein „ - “ getrennt sind**.

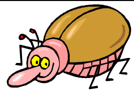
Beim Auflösen musst du erst im letzten Schritt dividieren (teilen), und zwar durch die Zahl, die vor dem x steht.

Beispiel:

$\frac{3x}{5} - 1$	=	$\frac{8x}{10} + \frac{3}{2}$	‖ • HN (10)	Multiplikation mit Hauptnenner, Bestimmen der Erweiterungsfaktoren
$\mathbf{2} \cdot 3x - \mathbf{10} \cdot 1$	=	$\mathbf{1} \cdot 8x + \mathbf{5} \cdot 3$	‖ V	Ausrechnen, was möglich ist
$6x - 10$	=	$8x + 15$	‖ - 6 x	x auf die rechte Seite schaffen
$6x - 10 - 6x$	=	$8x + 15 - 6x$	‖ V	Operatoren umstellen
$6x - 6x - 10$	=	$8x - 6x + 15$	‖ V	Ausrechnen, was möglich ist
$(\mathbf{-}\ 10)$	=	$2x + 15$	‖ - 15	x soll alleine stehen
$(-10) - 15$	=	$2x + 15 - 15$	‖ V	Ausrechnen, was möglich ist
(-25)	=	$2x$	‖ **:2**	Im letzten Schritt teilen
$\frac{(-25)}{2}$	=	x	$\mathbf{L = \{(-\frac{25}{2})\}}$	Lösungsmenge angeben.



Übungen / Beispiele „Gleichungen mit Bruchtermen (ohne Satzaufgaben)“



a) $\frac{10x}{3} - 2x = 5$

b) $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2} = \frac{3x}{4}$

c) $2 - \frac{2x}{5} = 6 - \frac{2x}{3}$

d) $\frac{2x+5}{5} = 3 - \frac{2x+1}{3}$

Fragen / Dinge auf die ich achten will: *(Raum für eigenen Notizen und Fragen)*

Satzaufgaben in Gleichungen umsetzen:

Das Umsetzen von Satzaufgaben in Gleichungen ist etwas vom Schwierigsten in der Mathematik überhaupt. Es ist ganz wichtig, dass du die gegebenen Informationen sehr genau studierst, sie dir vorstellst (was bedeutet das?) und dann versuchst, sie in mathematische Sprache zu übersetzen. **Dabei ist es enorm wichtig, dass du SEHR GENAU LIEST, was beschrieben ist, damit du dann die richtige Operation wählst.** *(Z.B. ist es ein Unterschied, ob man 4 von der Hälfte der Zahl subtrahiert oder ob man von 4 die Hälfte der Zahl subtrahiert)*

Dabei hilft es dir, wenn du ganz genau schrittweise vorgehst:

Typ 1:

Addiert man zu 2 einen Drittel einer Zahl, so erhält man gleich viel, wie wenn man 4 von der Hälfte der Zahl subtrahiert.

Diese Satzaufgabe gibt dir DREI Informationen zur Gleichung:

1. Addiert man zu 2 einen Drittel einer Zahl → $2 + \frac{x}{3}$
2. so erhält man gleich viel → =
3. wie wenn man 4 von der Hälfte der Zahl subtrahiert. → $\frac{x}{2} - 4$

Es entsteht also die Gleichung $\mathbf{2 + \frac{x}{3} = \frac{x}{2} - 4}$, die du gemäss Schema auflösen kannst.

Typ 2:

Addiert man zu 3 einen Drittel einer Zahl, so erhält man vier mehr, als wenn man von 2 die Hälfte der Zahl subtrahiert.

Diese Satzaufgabe gibt dir DREI Informationen zur Gleichung:

1. Addiert man zu 3 zu einen Drittel einer Zahl → $3 + \frac{x}{3}$
2. so erhält man vier mehr → *links ist um 4 grösser als rechts → links –4 oder rechts + 4 rechnen, um auszugleichen*
3. als wenn man von 2 die Hälfte der Zahl subtrahiert → $2 - \frac{x}{2}$

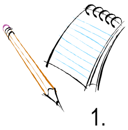
Es entsteht also die Gleichung $\mathbf{3 + \frac{x}{3} - 4 = 2 - \frac{x}{2}}$ **oder** $\mathbf{3 + \frac{x}{3} = 2 - \frac{x}{2} + 4}$, die du wie oben lösen kannst.

Typ 3:

Das Alter des Sohnes beträgt heute $\frac{2}{5}$ des Alters des Vaters. In 10 Jahren ist der Sohn genau halb so alt wie der Vater. Wie alt sind die beiden heute?

Hier gehst du so vor (Wichtig ist es zu wissen, dass VOM oder VON immer „MAL (•) *bedeutet)*

1. Heutige Situation:	VATER: x Jahre SOHN: $\frac{2}{5}$ *des Alters des Vaters* → $\frac{2}{5}$ vom Vater = $\frac{2}{5}$ • Vater = $\frac{2}{5}$ • x = $\frac{2x}{5}$ Jahre
2. Die Veränderung :	In 10 Jahren → Also werden beide Menschen 10 Jahre älter → Zum heutigen Alter müssen je 10 Jahre addiert werden. $VATER_{neu}$ = x **+ 10** Jahre $SOHN_{neu}$ = $\frac{2x}{5}$ **+ 10** Jahre
3. Der Vergleich der neuen Situationen:	dann ist der Sohn gerade halb so alt wie der Vater → Dann ist der Sohn gerade die Hälfte VOM Vater. Also: $Sohn_{neu}$ = Hälfte vom $Vater_{neu}$ $\frac{2x}{5} + 10 = \frac{1}{2} \bullet (x + 10)$ Diese Gleichung ist wieder aufzulösen wie gewohnt.



Übungen / Beispiele „Gleichungen mit Bruchtermen - Satzaufgaben“

1. Ein Vater ist heute 39 Jahre, sein Sohn 11 Jahre alt. In wie viel Jahren ist der Vater genau doppelt so alt wie der Sohn?

Analyse:

Gleichung / Rechnung:

2. In einem Hof tummeln sich Schweine und Hühner. Die Tiere besitzen zusammen 25 Köpfe, und die Zahl der Hühnerbeine ist um 10 grösser als $\frac{1}{3}$ der Zahl der Schweinefüsse. Wie viele Schweine und wie viele Hühner befinden sich im Hof?

Analyse:

Gleichung / Rechnung:

3. Die beiden Heissluftballone A und B fahren über dem Pfäffikersee. Die Flughöhe von A beträgt dabei $\frac{3}{8}$ der Flughöhe von B. Würden beide Ballone um 330 m steigen, so betrüge die neue Flughöhe von A $\frac{4}{7}$ der Flughöhe von B. Berechne die momentanen Flughöhen von A und B.

Analyse:

Gleichung / Rechnung:

4. In einem Hochhaus fahren zwei parallele Lifte mit gleicher Geschwindigkeit nach oben. Der erste Lift befindet sich im Moment 36m über Boden, der zweite Lift ist 81m über Boden. Wie viele Meter müssten sie noch steigen, damit der erste Lift $\frac{4}{7}$ der Höhe des zweiten Liftes erreicht?

Analyse:

Gleichung / Rechnung: