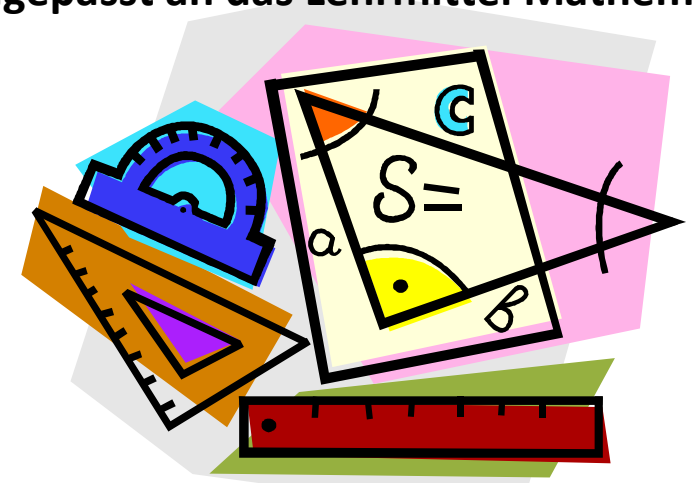
Name:

Geometrie-Dossier

6 – Rund um den Kreis

(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 2)



Inhalt:

- **Berechnungen in Kreis und Kreissektoren (Bogenlängen, Umfang, Durchmesser, Fläche)**
- **In- und Umkreis eines Vielecks**
- **Kreis und Geraden (Tangenten, Passanten, Sekanten und Sehnen)**
- **Konstruktionen am und im Kreis**
- **Berechnungen mit Kreis und Geraden am und im Kreis**

Online findest du dieses und andere Dossiers unter www.andiraez.ch/schule

---

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

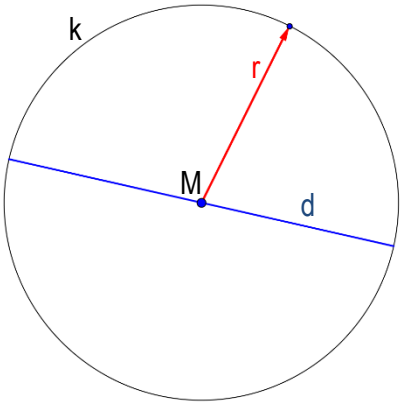
Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Konstruktionen: *Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
Skizzen: Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.
Sichtbarkeit: In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen

1. Der Kreis

1.1 Kreis

Zur Erinnerung die „Teile“ eines Kreises:



k: Kreislinie

M: Kreismittelpunkt

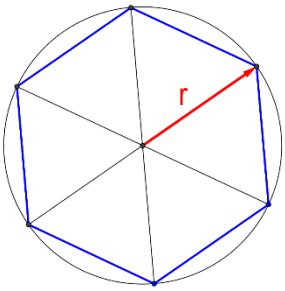
r: Kreisradius

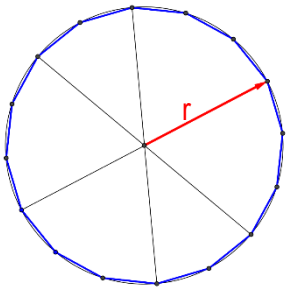
d: Kreisdurchmesser (= 2 ● Kreisradius)

1.2 Kreisumfang (Länge der Kreislinie)

Der Umfang eines Polygons (Vieleckes) ist einfach zu berechnen. Man addiert alle Seiten und die Summe ist dann der Umfang der Figur. Bei einem regelmässigen Vieleck kann der Umfang abhängig vom Umkreisradius bestimmt werden. Je mehr Ecken das Vieleck hat, desto näher ist die Form an einem Kreis.

Hier sehen wir ein regelmässiges 6-Eck mit seinem Umkreis, daneben ein regelmässiges 16-Eck mit Umkreis. Es ist sichtbar, wie sich der Umfang des Vielecks immer stärker der Kreislinie annähert.





Im Falle des Kreises ist dies nicht ganz so einfach, denn es gibt ja keine einzelnen Seiten. So haben zahlreiche Denker und Mathematiker schon vor langen Zeiten gerechnet, gemessen und geforscht. Wir können das auch tun. Wenn wir einen Kreis zeichnen und dann den Umfang mit Hilfe einer Schnur bestimmen, dann können wir einen Zusammenhang zwischen Radius, Durchmesser und Umfang finden:

Kreisdurchmesser	10 cm	7	6	5cm
Kreisumfang (gemessen)	31.4 cm	22 cm	18.8 cm	15.7 cm

Doch welchen Zusammenhang finden wir?

Die Zahlen (Kreisdurchmesser zu Kreisumfang) verhalten sich proportional, der Proportionalitätsfaktor beträgt hier ca. 3.14. Und genau diese Gesetzmässigkeit haben sich die alten Griechen schon zu Nutze gemacht und haben deshalb die Konstante (Feste Zahl) mit dem Namen π (gesprochen: Pi) eingeführt. Dabei gilt:

Die Kreiszahl π (Pi) beträgt ungefähr 3.141592654. Normalerweise wird sie aber als π stehen gelassen. In einigen Fällen verwendet man für π auch den Näherungswert $\frac{22}{7}$.

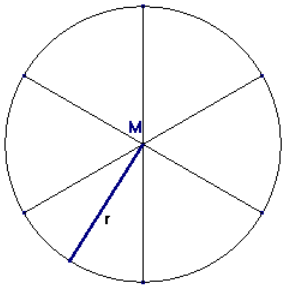
Die Formeln für den Kreisumfang sind somit: u_{Kreis} = π ● Durchmesser = π ● 2 ● Radius

u_{Kreis} = d ● π = 2 ● r ● π oder kurz: u_{Kreis} = d π = 2 π r

1.3 Kreisfläche

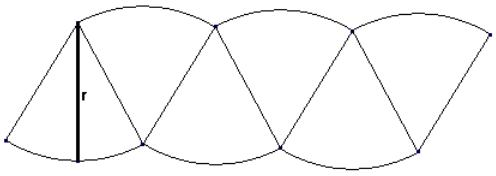
Durch die Einführung der Kreiszahl π sind wir nun in der Lage, die Fläche des Kreises zu berechnen. Dieser Berechnung liegt eine einfache Überlegung zu Grunde: Die Fläche eines Rechteckes, die durch Länge • Breite ganz leicht zu berechnen ist. Wenn es nun also gelingt, einen Kreis in ein Rechteck „umzubauen", dann können wir die Fläche des Kreises nachher berechnen.

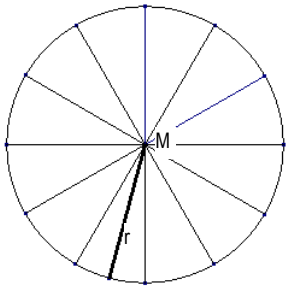
Mit der dargestellten Zerlegung des Kreises in ganz kleine Abschnitte (Kreissektoren) kann dies näherungsweise gezeigt werden:



u = 2 r π

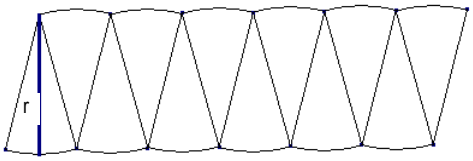
Zerlegung des Kreises in 6 Sektoren

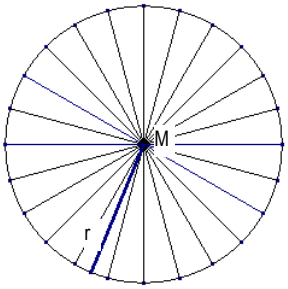




u = 2 r π

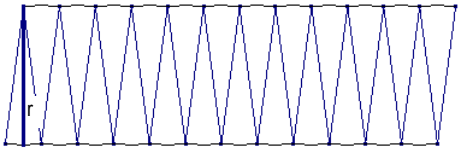
Zerlegung des Kreises in 12 Sektoren



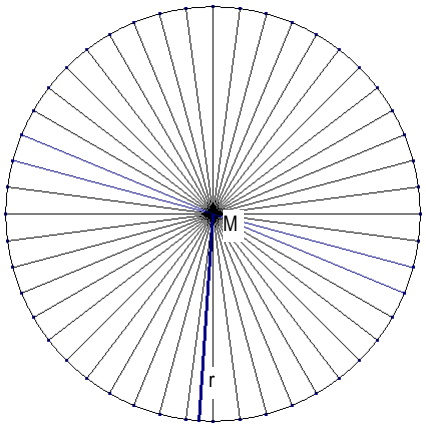


u = 2 r π

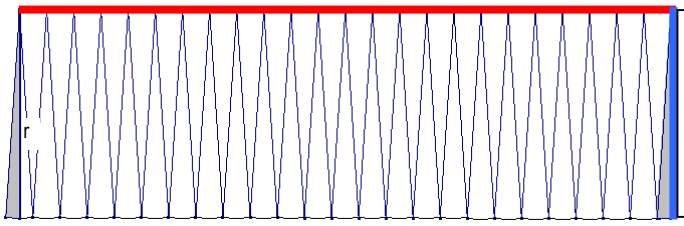
Zerlegung des Kreises in 24 Sektoren



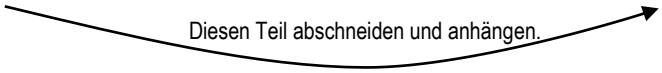
Je kleiner die Abschnitte gewählt werden, desto besser können wir ein Rechteck legen. Wenn wir also die Abschnitte super-super-superklein wählen, hätten wir praktisch ein perfektes Rechteck. Mit einer weiteren Zerlegung des Kreises in 48 Sektoren können wir aber auch schon sehen, wie sich das nachher präsentiert:



Die **Länge des Rechteckes ist die Hälfte des Kreisumfanges** (weil ja immer ein Stück mit „Breitseite" nach oben und eines mit „Breitseite" nach unten hingelegt wird)



Der **Kreis-Radius** bildet die **Breite des Recht-ecks**



Somit lässt sich die Fläche des Rechteckes (und damit des Kreises) berechnen:

A_{Kreis} = Länge • Breite

= Hälfte des Kreisumfangs • Kreisradius

= $\frac{u}{2}$ • r ➔ $\frac{u}{2} = r \bullet \pi$, weil ja $u = 2 \pi r$

= **$r \bullet \pi$** • **r**

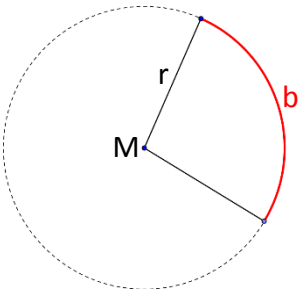
Die Kreisfläche entspricht also dem Radius im Quadrat mal Kreiszahl "Pi"

$A_{Kreis} = r^2 \pi$

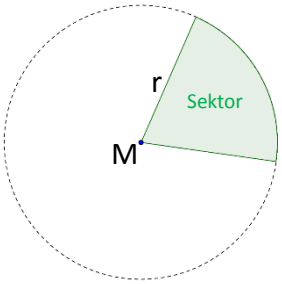
1.4 Fläche und Bogenlänge bei Kreissektoren

Hin und wieder ist es wichtig, nicht ganze Kreise, sondern Sektoren von Kreisen zu berechnen. Als Kreissektor wird die Fläche eines „Stückes" des Kreises bezeichnet (➔ Kuchenstück). Als Kreislinie bezeichnet man den Anteil der Kreislinie an diesem Kuchenstück.

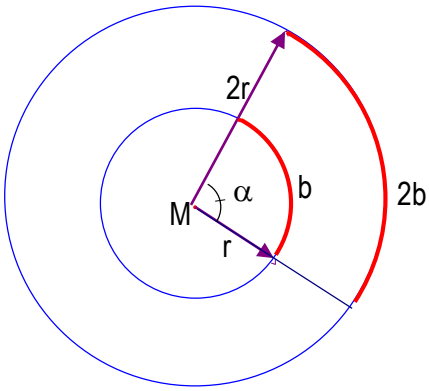
Dies ist die Bogenlänge b (Länge des Kreisbogens)



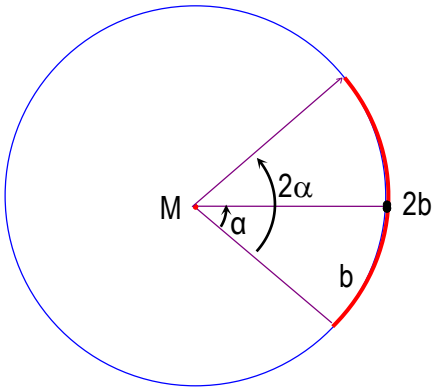
Hier eingezeichnet ist ein Kreissektor



Für die Berechnung der Kreissektoren können wir uns auf eine mathematische Betrachtung festlegen: Die Proportionalität. Wenn man nämlich genau hinschaut, stellt man fest:



b: Bogenlänge
r: Kreisradius
α: Zentriwinkel



Denkfigur 1:
Zusammenhang zwischen dem Radius r und dem Kreisbogen b:

- je grösser der Radius, desto grösser die Bogenlänge.
- zum doppelten Radius (2r) gehört die doppelte Bogenlänge (2b).

Denkfigur 2:
Zusammenhang zwischen dem Zentriwinkel ∝ und dem Kreisbogen b:

- je grösser der Zentriwinkel, desto grösser die Bogenlänge.
- zum doppelten Zentriwinkel (2a) gehört die doppelte Bogenlänge (2b).

Die Bogenlänge ist proportional zum Radius und proportional und Grösse des Zentriwinkels. Das Gleiche gilt für die Sektor-Fläche.

Proportionalitätsansatz:

$2\pi r$ ——— $360°$ $\qquad$ $r^2\pi$ ——— $360°$

b ——— α $\qquad$ A ——— α

Somit:

$$b = \frac{2\,\pi\, r \bullet \alpha}{360°}$$

$$A_{Sektor} = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360°} = \frac{b \bullet r}{2}$$

Die gefundene Formel bedeutet jetzt also nichts anderes, als dass sich die Länge des Kreisbogens berechnen lässt als Quotient aus dem Produkt von Kreisumfang und Zentriwinkel und dem vollen Winkel (360°). Anders gesagt: Der Bruchteil des vollen Kreises (Zentriwinkel geteilt durch 360°) mal dem Kreisumfang. Genau gleich gilt das für die Kreissektor-Fläche: Zentriwinkel geteilt durch 360° mal Kreisfläche.

Aufgaben Kreis 1:

1. Berechne den Umfang und die Fläche eines Kreises mit:

a) r = 15 cm u_{Kreis}= ..... A_{Kreis}= .....

b) d = 5.6 cm u_{Kreis}= ..... A_{Kreis}= .....

c) r = 99 cm u_{Kreis}= ..... A_{Kreis}= .....

d) r = 12x u_{Kreis}= ..... A_{Kreis}= .....

e) d= 13m u_{Kreis}= ..... A_{Kreis}= .....

2. Berechne den Durchmesser des Kreises mit:

a) u_{Kreis}= 183.89 cm d= .....

b) u_{Kreis}= 15.67 cm d = ...

c) u_{Kreis}= 35 π x d = ...

d) A_{Kreis}= 1683 m^2 d = ...

e) A_{Kreis}= $685\frac{1}{3}$ cm^2 d = ...

f) A_{Kreis}= $684x^2\pi$ d = ...

3. Berechne den Radius des Kreises mit:

a) u_{Kreis}= 83.89 cm r= .....

b) u_{Kreis}= 5.67 cm r = ...

c) u_{Kreis}= 355 π x r = ...

d) A_{Kreis}= 163 m^2 r = ...

e) A_{Kreis}= $68\frac{1}{3}$ cm^2 r = ...

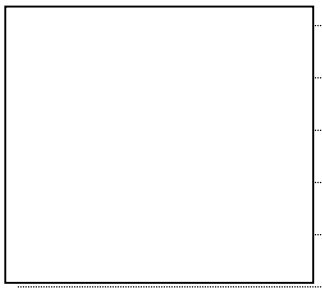
f) A_{Kreis}= $64x^2\pi$ r = ...

4. **Berechne die Fläche eines Kreises mit dem Umfang u = 2568cm**

5. **Berechne den Umfang eines Kreises mit der Fläche A = 2682 cm^2**

6. **Peter und Marili, zwei herzige kleine Kindergartenfreunde, spielen mit ihren Freunden „Lueged nöd ume, dä Fuchs gaht ume". Dies begeistert die beiden sehr. Jakob, der grosser Bruder von Marili möchte nun herausfinden, welche Strecke die Beiden zurückgelegt haben (sie sind natürlich schön brav auf einem Kreis gerannt, dessen Radius 3.2 m misst).**
   a. Wie weit ist Marili gerannt, wenn du weisst, dass sie 15 Runden zurückgelegt hat?
   b. Peter ist anderthalbmal so viele Runden gelaufen. Welche Strecke hat er Strecke gelaufen?

7. **Einem Quadrat mit der Seitenlänge 16cm wird ein Kreis eingeschrieben. Skizziere die Situation und berechne den Umfang und die Fläche des Kreises.**



8. **Aus einem Kreis (d = 15cm) wird ein Kreissektor herausgeschnitten, der gerade einen Sechstel des ganzen Kreises ausmacht. Berechne**
   a. Die Fläche des Kreissektores
   b. Die Länge des Bogens
   c. Die Grösse des Zentriwinkels des herausgeschnittenen Sektors

9. Aus einem Kreis mit dem Durchmesser 123cm wird ein Kreissektor (Zentriwinkel $\alpha = 138°$) herausgeschnitten. Berechne

a. Die Fläche des Kreissektores

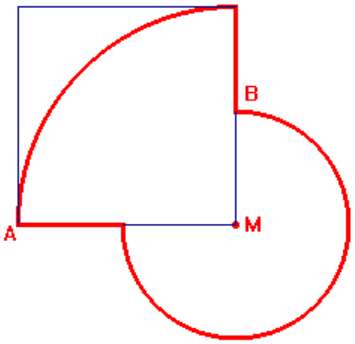
b. Die Länge des Bogens

10. Aus einem Kreis mit dem Durchmesser x wird ein Kreissektor (Zentriwinkel $\alpha = 170°$) herausgeschnitten. Berechne

a. Die Fläche des Kreissektores

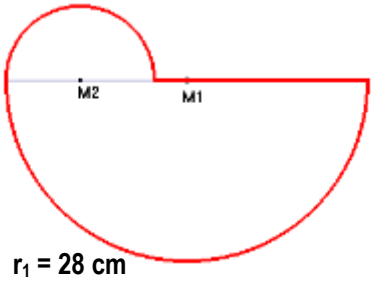
b. Die Länge des Bogens

11. Berechne den Umfang der fett markierten (roten) Figur



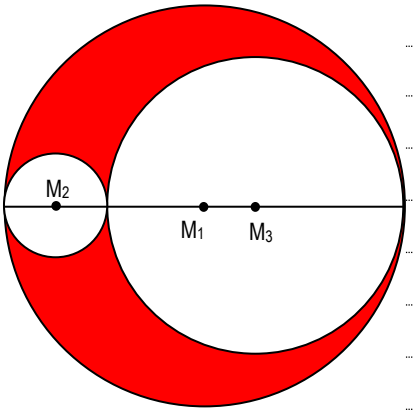
AM = 15 cm
BM = 6 cm

12. Berechne den Umfang der fett markierten (roten) Figur (M_2 ist Mittelpunkt des Kreises k_2 mit Radius r_2; M_1 ist Mittelpunkt des Kreises k_1 mit Radius r_1)

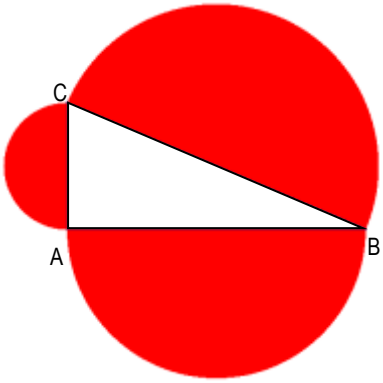


$r_1 = 28$ cm
$r_2 = 6$ cm

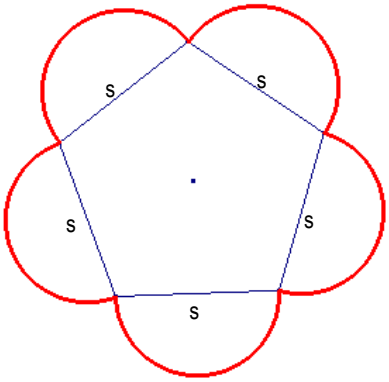
13. Berechne den Umfang und die Fläche der markierten Figur (rot). (M_1, M_2 und M_3 sind die Kreismittelpunkte der Kreise k_1, k_2, k_3 mit dem jeweiligen Radius $r_1 = 15$cm, $r_2 = 3$cm, $r_3 = 12$cm.)



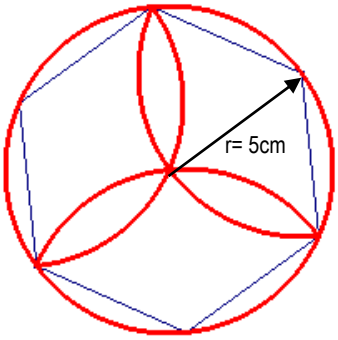
14. Berechne die Fläche der markierten Figur (rot). (AB =8cm, AC = 6cm, BC= 10cm.)



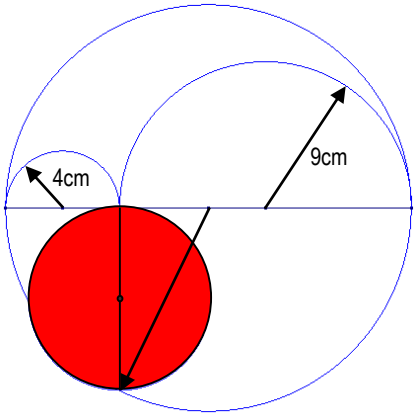
15. Berechne den Umfang der von den Kreisbogen begrenzten Figur im regelmässigen Fünfeck (s = 12cm)



16. Berechne die Länge der rot markierten Strecke (die zu Grunde liegende Figur ist ein regelmässiges Sechseck)



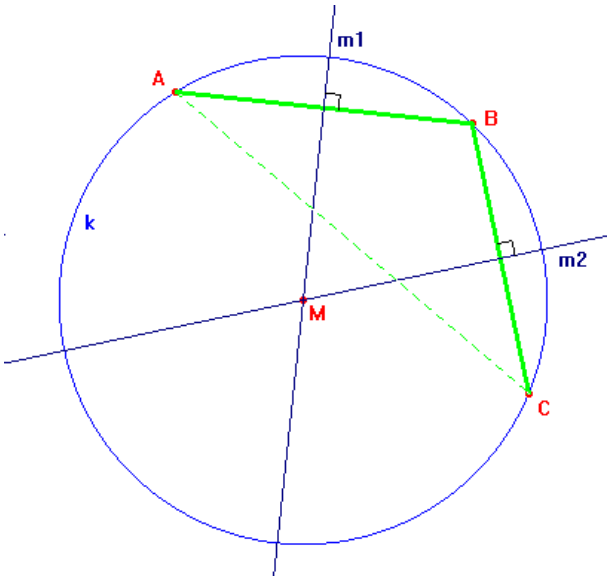
17. Berechne die Fläche des rot markierten Kreises (auf eine Kommastelle genau.)



2. Kreis und Geraden

2.1 Die spezielle Eigenschaft des Kreismittelpunktes

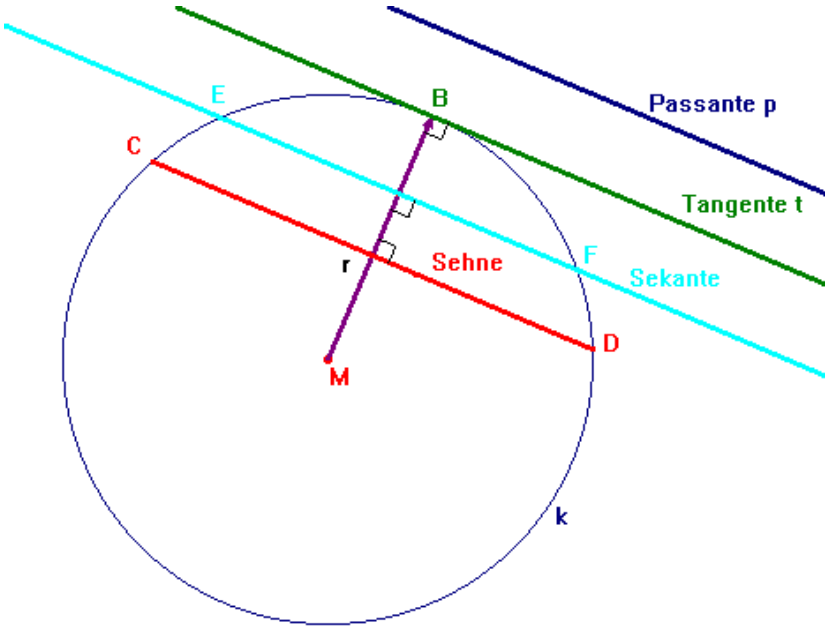
Eine spezielle Eigenschaft des Kreises spielt für die Konstruktion mit Kreisen eine wichtige Rolle. Es geht dabei um die spezielle Lage des Mittelpunktes eines Kreises.



- Ein **Kreis ist durch 3 Punkte eindeutig bestimmt**.
- Der **Kreismittelpunkt liegt** dabei **auf dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten** von je zwei Punkten.
- Hier ist der Kreismittelpunkt als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_1 (Mittelsenkrechte von AB) und der Mittelsenkrechten m_2 (Mittelsenkrechte von BC) konstruiert worden. Er entspricht dem Umkreis des Dreieckes ABC. (Siehe auch unter dem Punkt „In- und Umkreis“)

3. Gegenseitige Lage von Kreis und Geraden.

Ein Kreis und eine Gerade können in verschiedener Art in der Ebene liegen. Die Gerade kann den Kreis schneiden, ihn berühren oder neben dem Kreis verlaufen. Je nach ihrer Lage wird sie daher unterschiedlich bezeichnet. Untenstehend findet sich eine Übersicht über die verschiedene Bezeichnung einer Gerade bezüglich eines Kreises:



Die **Passante p passiert den Kreis**, sie hat also keinen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis (Passante = „Vorbeigehende“)

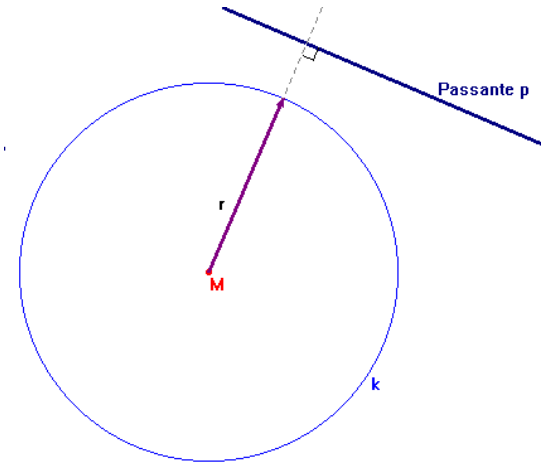
Die **Tangente t berührt den Kreis** im Berührungspunkt B. Sie hat also genau einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis. (Tangente = „Berührende“)

Die **Sekante schneidet den Kreis in zwei Punkten** (hier E und F). Sie hat also genau zwei gemeinsame Punkte mit dem Kreis, nämlich die Schnittpunkte E und F. (Sekante = „Schneidende“)

Die **Sehne ist eine Strecke, die innerhalb des Kreises** verläuft. Sie hat **genau zwei Punkte mit dem Kreis gemeinsam**, nämlich die Schnittpunkte C und D. Die Sehne ist ein Teil einer Sekante.

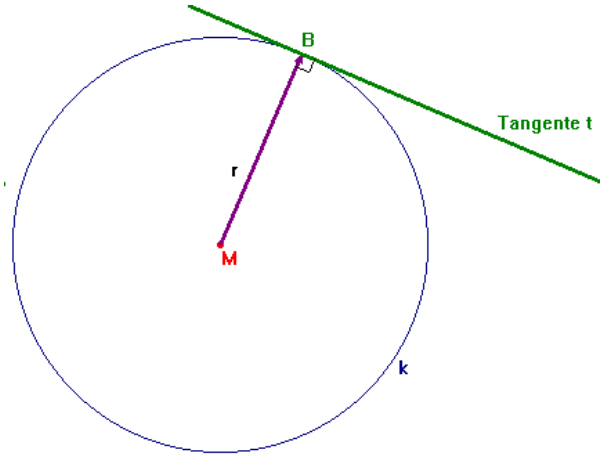
Betrachten wir diese verschiedenen Geraden noch genauer, damit diese typischen Eigenschaften auch klar definiert werden können und wir sie wieder für die Konstruktion nützen können.

3.1 Die Passante



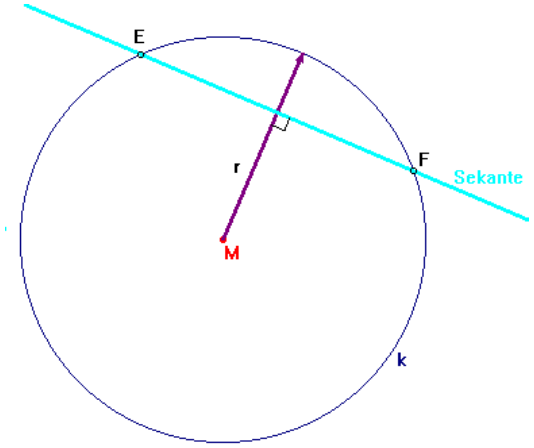
- Passante und Kreis haben keinen gemeinsamen Punkt (→ Die **Passante schneidet den Kreis nicht**)
- Der Abstand von Passante zum Kreismittelpunkt ist grösser als der Kreisradius r (Mp > r)

3.2 Die Tangente



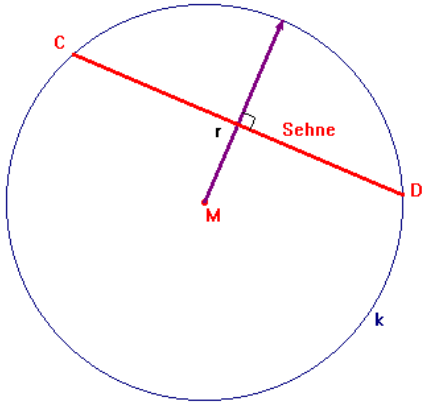
- **Die Tangente berührt den Kreis im Berührungspunkt B** (Tangente und Kreis haben genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Punkt B).
- **Der Abstand MB entspricht gerade dem Kreisradius (MB = r)**
- Die **Tangente steht senkrecht auf dem Kreisradius (t ⊥ MB)**
- Für die Konstruktion von Tangenten stehen uns **zwei Grundkonstruktionen** zur Verfügung (siehe Grundkonstruktionen 1 und 2)

3.3 Die Sekante



- Die **Sekante schneidet den Kreis in genau zwei Punkten**. (Schnittpunkte)
- **Die Verbindung zwischen den Schnittpunkten E und F ist eine Sehne.**
- Der **Abstand der Sekante zum Kreismittelpunkt M ist** dabei **kleiner als der Kreisradius r (Ms < r).**

3.4 Die Sehne



- **Zwei Punkte auf dem Kreis bestimmen eine Sehne**. Die Entfernung der beiden Punkte ist dabei höchstens so gross wie der Durchmesser des Kreises (AB ≤ 2r)
- **Sehnen gleicher Länge haben gleichen Abstand von M (da sie um M gedreht wurden)**

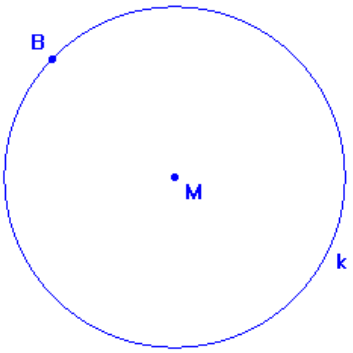
4. Grundkonstruktionen für die Konstruktion von Tangenten an den Kreis.

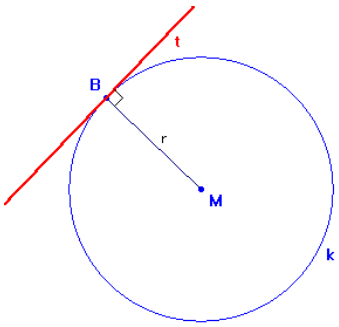
4.1 *Grundkonstruktion 1:* Tangenten durch einen Punkt der Kreislinie.

Es handelt sich hier um die einfachste Konstruktion einer Tangente. Wir nützen ganz einfach die Eigenschaft, dass **Tangenten senkrecht auf dem Kreisradius stehen**.

Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere die Tangente t, welche den Kreis k im Punkt B berührt.

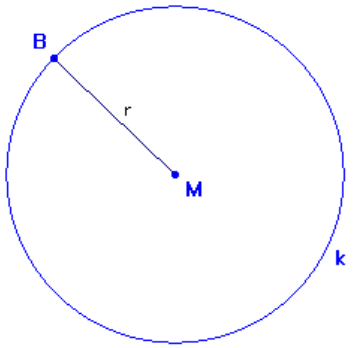


Skizze	**KB (Lösungsplan):**
	1. BM verbinden 2. Lot auf BM durch B ➔ Tangente t.

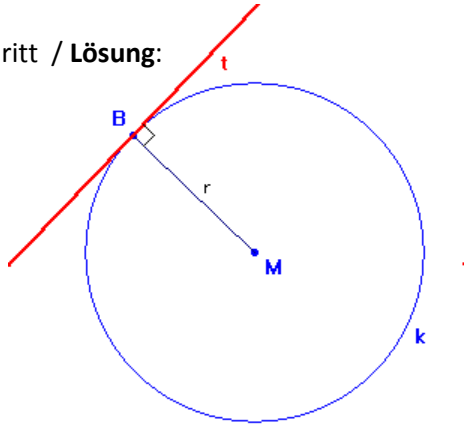
Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

1. Schritt:



2. Schritt / **Lösung**:

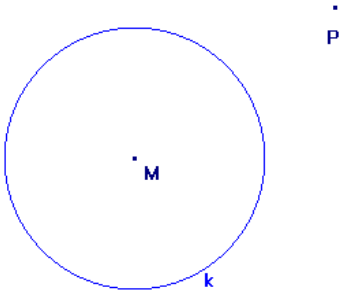


4.2 *Grundkonstruktion 2*: Tangenten an einen Kreis durch einen Punkt P ausserhalb des Kreises.

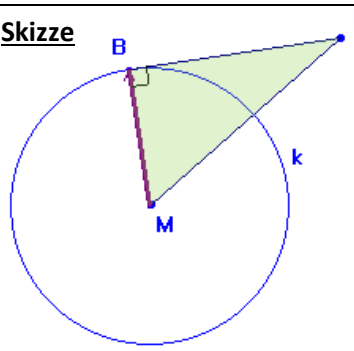
Diese zweite Grundkonstruktion ist wichtig und wird sehr häufig verwendet. Es geht hier darum, die Berührungspunkte der Tangente an den Kreis zu finden. Auch hier verwenden wir die Eigenschaft, dass der **Berührungspunkt der Tangente an den Kreis senkrecht auf dem Radius steht**. So bilden der Punkt P, der Berührungspunkt B und der Kreismittelpunkt M ein rechtwinkliges Dreieck, welches **mittels Thaleskreis über MP konstruiert werden kann**.

Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere die Tangente t, welche den Kreis k berührt und durch den Punkt P geht.



Skizze



Der Berührungspunkt B bildet mit dem Kreismittelpunkt M und dem Punkt P ein rechtwinkliges Dreieck. → Thaleskreis!

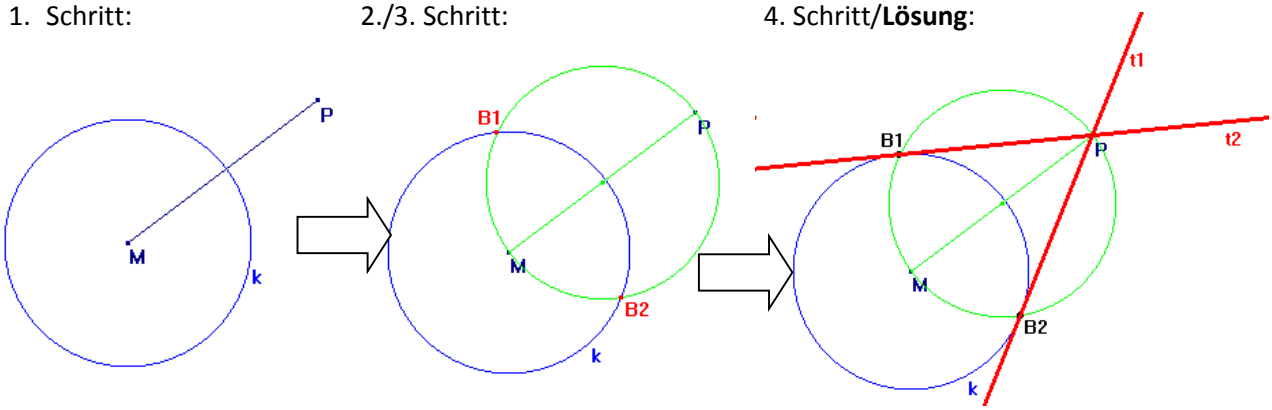
KB (Lösungsplan):

1. MP verbinden
2. Thaleskreis über MP
3. Thaleskreis mit k schneiden → B_1, B_2 (Berührungspunkte)
4. PB_1 und PB_2 verbinden (→ Tangenten t_1, t_2)

Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

1. Schritt: 2./3. Schritt: 4. Schritt/**Lösung**:



Zur Erinnerung: Der Thaleskreis über die Strecke MP hat seinen Mittelpunkt in der Mitte der Strecke MP. Also muss zuerst MP halbiert werden, damit der Thaleskreis gezeichnet werden kann.

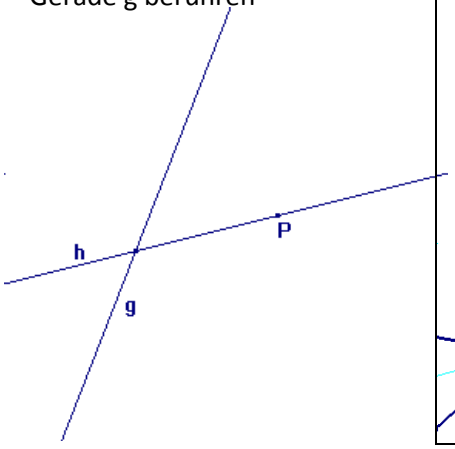
Es ist hier anzumerken, dass die Konstruktion der Berührungspunkte in jedem Fall mittels Thaleskreis zu erfolgen hat. Das „Hinlegen" des Geo-Dreiecks ist äusserst ungenau und hat mit Geometrie nichts zu tun.

4.3 Grundkonstruktion *3:* Kreise, welche zwei sich schneidende Geraden berühren, eine davon in einem vorgegebenen Punkt.

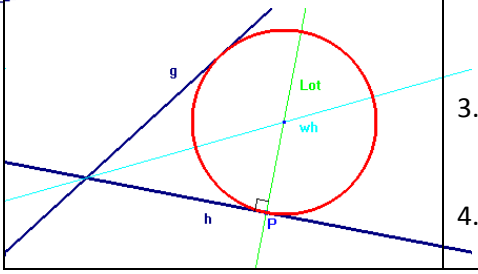
Die Schwierigkeit der Problemstellung wird immer grösser und wir müssen neben der in den Grundaufgaben 1 und 2 angesprochenen Eigenschaft des Senkrechtstehens von Kreisradius und Tangente noch weitere Eigenschaften verwenden. Der **Kreismittelpunkt eines Kreises, der zwei sich schneidende Geraden berühren muss, hat die Eigenschaft, dass er von den beiden Geraden gleichen Abstand hat** (gleicher Abstand von zwei sich schneidenden Geraden ➔ **Winkelhalbierende**).

Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere alle Kreise, die die Gerade h im Punkt P und die Gerade g berühren



Skizze



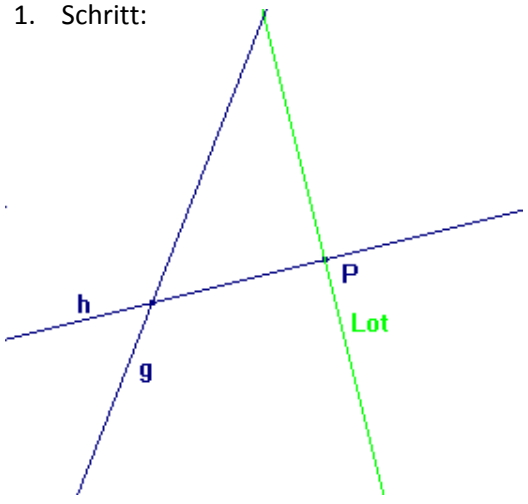
KB (Lösungsplan):

1. Lot auf h durch P
   (Tangente steht senkrecht auf dem Kreisradius)
2. Winkelhalbierende von g, h zeichnen *(Achtung: 2 wh!)*
   (Gleicher Abstand von zwei Geraden)
3. Winkelhalbierende mit Lot schneiden → M_1, M_2 *(Kreismittelpunkte)*
4. Kreise zeichnen (2 Lösungen) (Radius = MP)

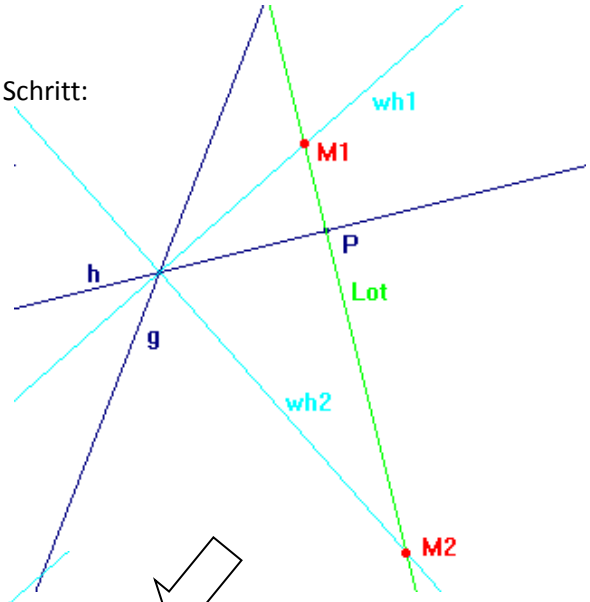
Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

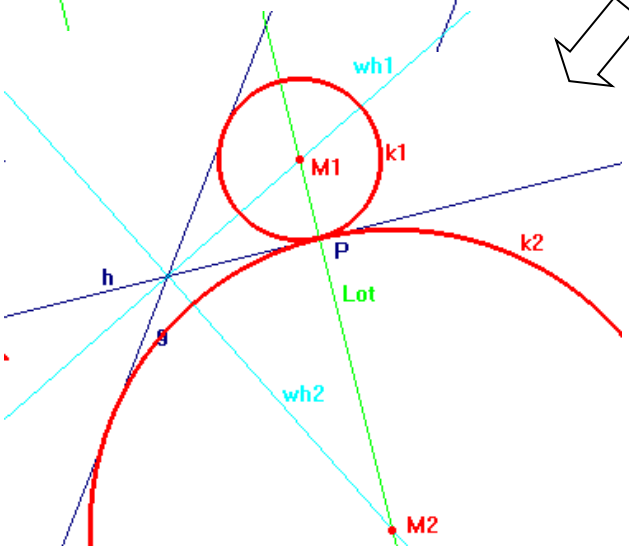
1. Schritt:



2./3. Schritt:



4. Schritt/**Lösung**:

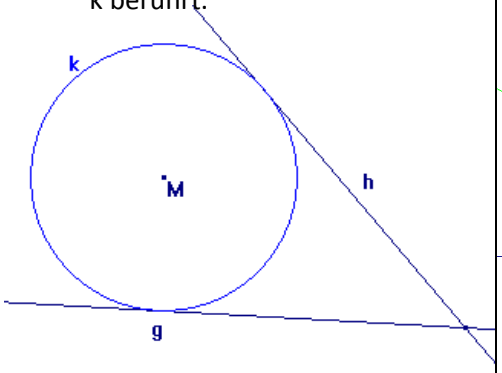


4.4 *Grundkonstruktion 4*: Kreise, welche zwei sich schneidende Geraden und einen Kreis berühren.

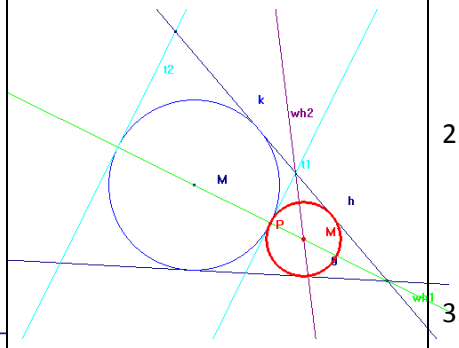
Diese Aufgabe baut auf der Grundaufgabe 3 auf, es kommt einfach noch das Berühren eines Kreises hinzu. Entsprechend brauchen wir auf jeden Fall wieder die Winkelhalbierende und müssen danach die Grundaufgabe 3 gleich nochmals lösen, denn die Tangente an den Kreis bildet mit den gegebenen Geraden wieder zwei sich schneidende Geraden.

Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere einen Kreis, der die Geraden g und h, sowie den Kreis k berührt.



Skizze



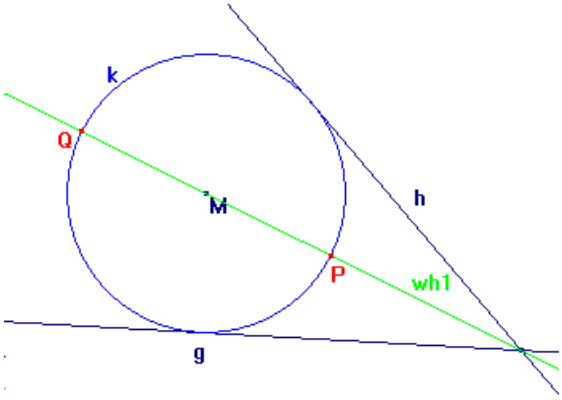
KB (Lösungsplan):

1. Winkelhalbierende von g, h zeichnen (geht durch M)
   ➔ ergibt die Schnittpunkte P, Q
2. Lot auf Winkelhalbierende durch P, Q *(gemeinsame Tangenten der sich berührenden Kreise, stehen senkrecht auf dem Radius)*
3. Winkelhalbierende von Lot und h (bzw. g) zeichnen
   → M_1, M_2
   (→ vgl. Grundaufgabe 3)
4. Kreise zeichnen (2 Lösungen) (Radius = M_1P und M_2Q)

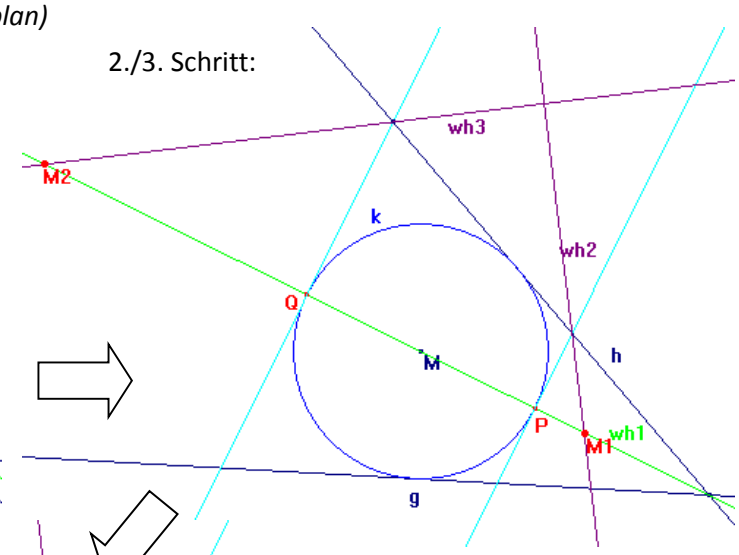
Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

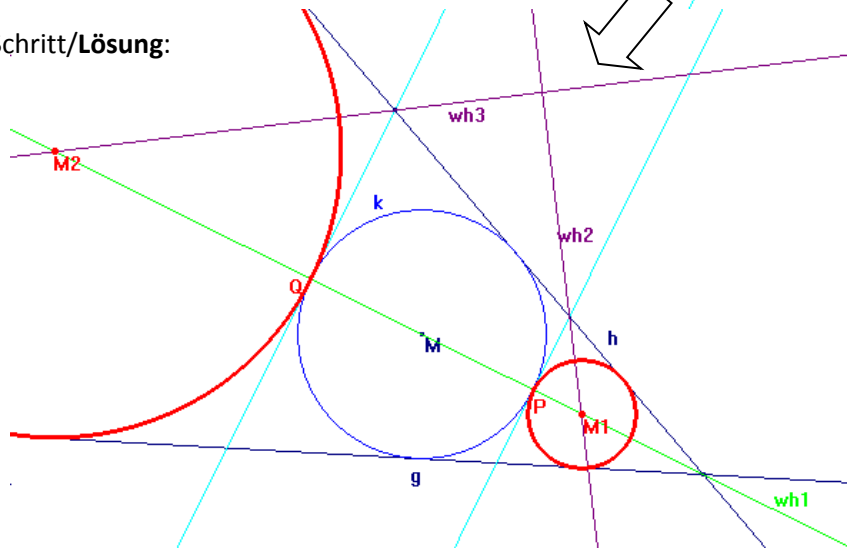
1. Schritt:



2./3. Schritt:



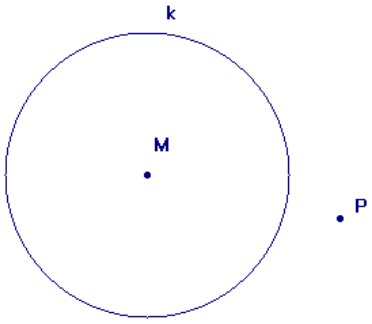
4. Schritt/**Lösung**:



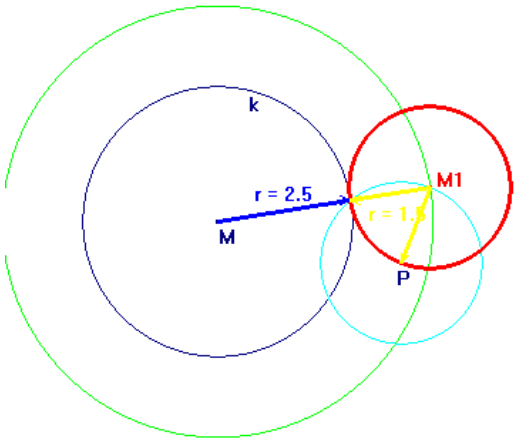
5. Weitere Standardkonstruktionen mit Tangenten.

5.1 *Weitere Konstruktion 1*: Kreise, die einen anderen Kreis berühren und durch einen Punkt P gehen.

Ausgangslage / Aufgabenstellung:
Konstruiere alle Kreise mit 1.5 cm Radius, die k berühren und durch P gehen (PM = 3.5cm, r = 2.5cm).



Skizze

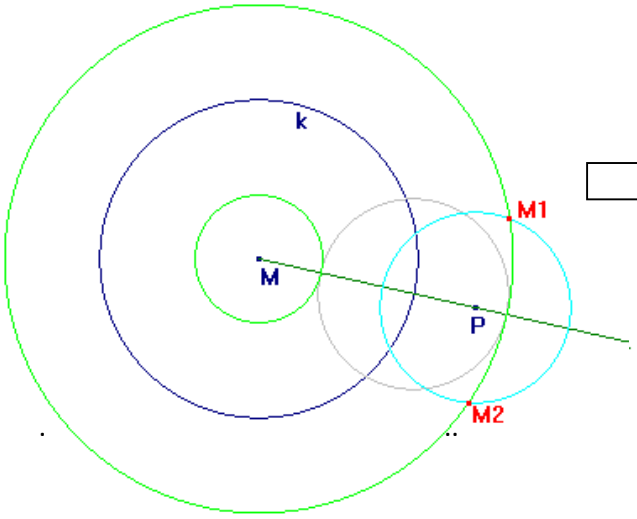


KB (Lösungsplan):

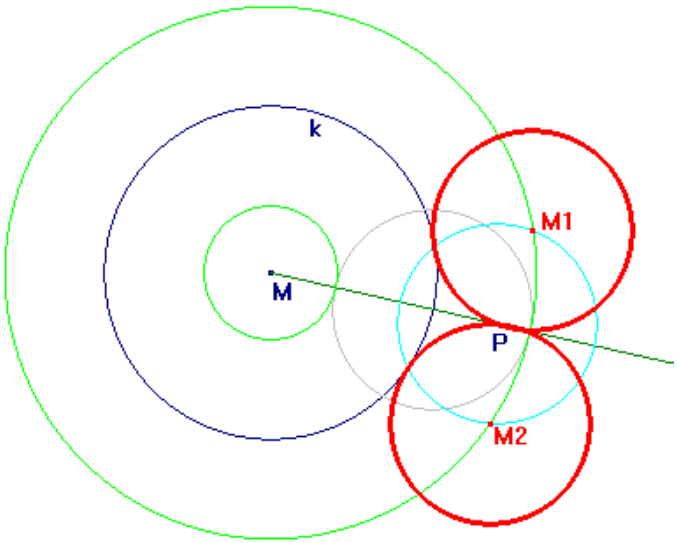
1. Kreis um den Punkt P (r = 1.5cm) → *Der Kreismittelpunkt muss von P 1.5 cm Abstand haben, damit der Kreis durch P geht*
2. Den Radius des gegebenen Kreises k um 1.5 cm vergrössern, rsp. verkleinern ➔ *Der gesuchte Kreismittelpunkt muss im Abstand des Radius von k entfernt liegen*
3. Die Schnittpunkte sind Kreismittelpunkte
4. Lösungen einzeichnen *(2 oder 4 Lösungen möglich, je nachdem ob auch der innere Kreis geschnitten wird!!)*

Konstruktionsschritte:
(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

1. / 2. / 3. Schritt:



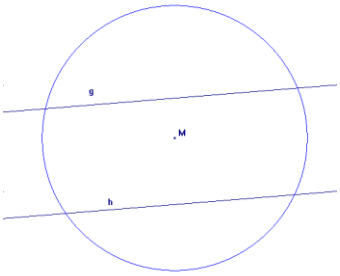
4. Schritt / **Lösung**



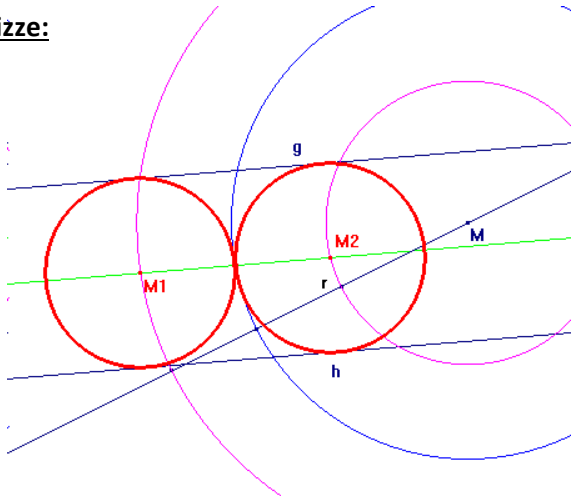
5.2 *Weitere Konstruktion 2*: Kreise, die zwei parallele Geraden und einen Kreis berühren.

Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere einen Kreis mit, welcher die beiden parallelen Geraden g und h, sowie den gegebenen Kreis k (M, r = 5cm) berührt. (Mg = 1.5cm, Mh =2.5 cm).



Skizze:



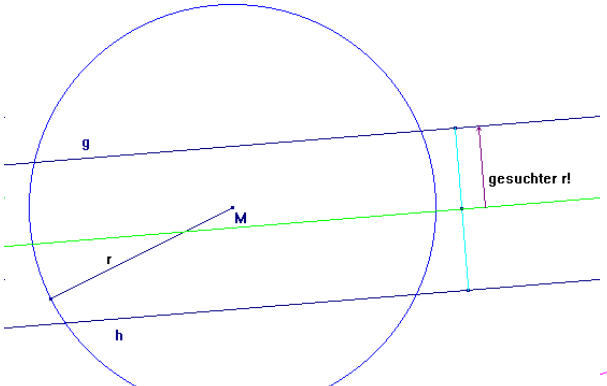
KB (Lösungsplan):

1. Mittelparallele von g, h *(→ dies, weil der Mittelpunkt des Berührungskreises genau zwischen g und h liegen muss → gleicher Abstand von zwei parallelen Geraden = Mittelparallele)*
2. Den gegebenen Kreisradius um die Hälfte des Abstandes von g und h vergrössern (rsp. verkleinern) *→ Der gesuchte Kreisradius entspricht dem Abstand von Mittelparallele zur Gerade g und h, also hat der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auch diesen entsprechenden Abstand vom gegebenen Kreis k.*
3. Den grösseren und kleineren Kreis mit der Mittelparallele schneiden ➔ M_1, M_2, M_3, M_4
4. Lösungen einzeichnen *(4 Lösungen)*

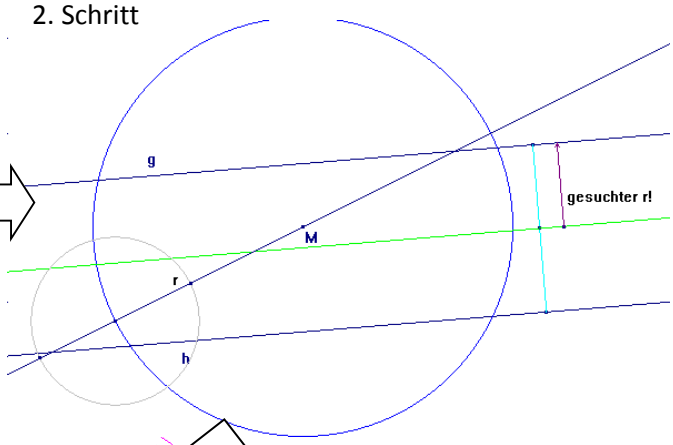
Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

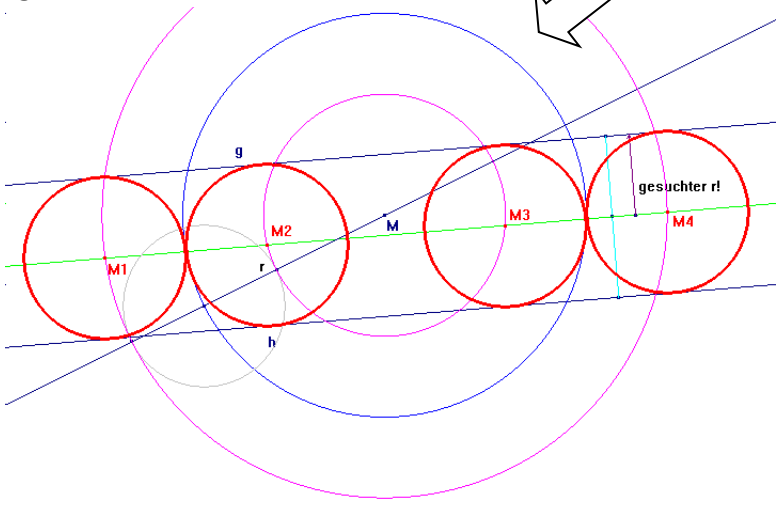
1. Schritt:



2. Schritt



3./4. Schritt / **Lösung**



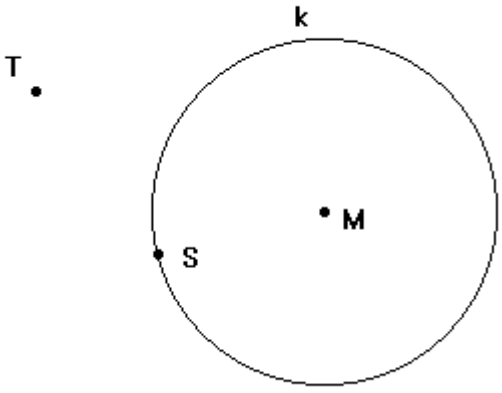
Aufgaben Kreiskonstruktionen:

1. Konstruiere alle Kreise k mit Radius 3.5cm, welche durch die gegebenen Punkte P und Q gehen.

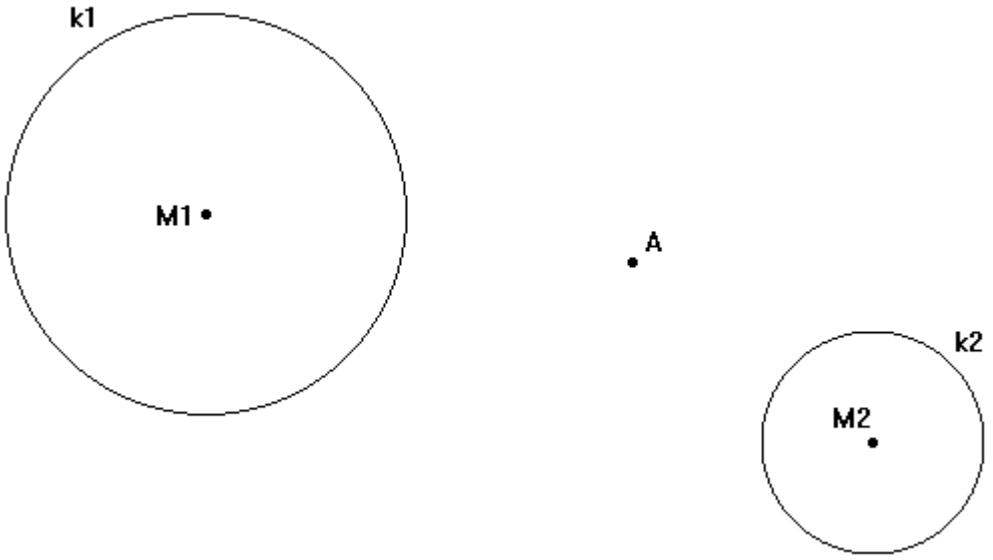
P

Q

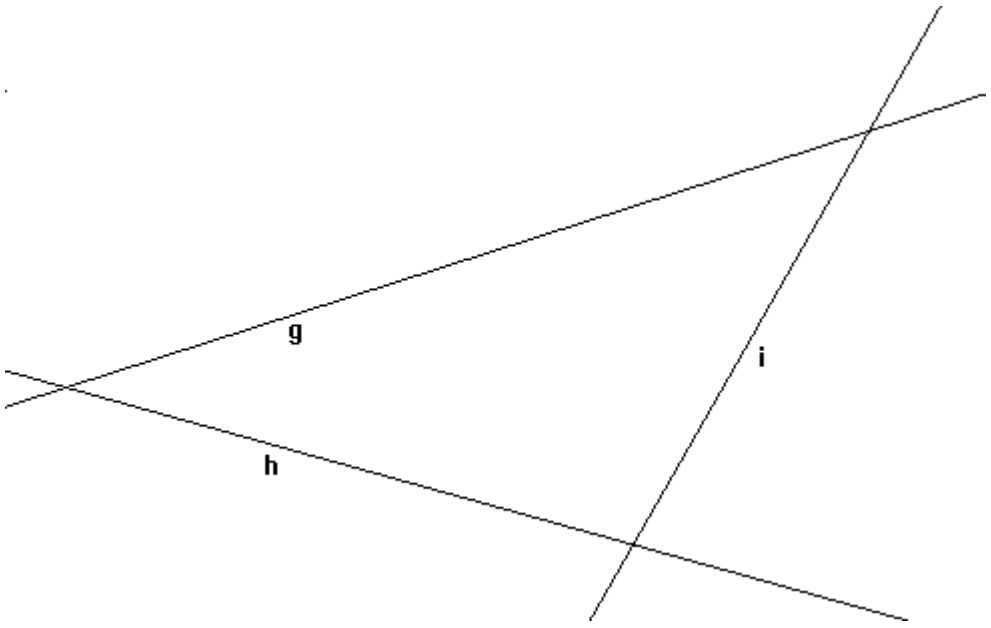
2. Konstruiere einen Kreis, der den gegebenen Kreis k in S berührt und der durch T geht.



3. Gegeben sind der Kreis k_1, der Kreis k_2 und der Punkt A ausserhalb der Kreise. Konstruiere alle Tangenten an die Kreise k_1 und k_2, welche durch A gehen. (Also: Tangenten an k_1 durch A, Tangenten an k_2 durch A, kein Zusammenhang zwischen den beiden Teilaufgaben)

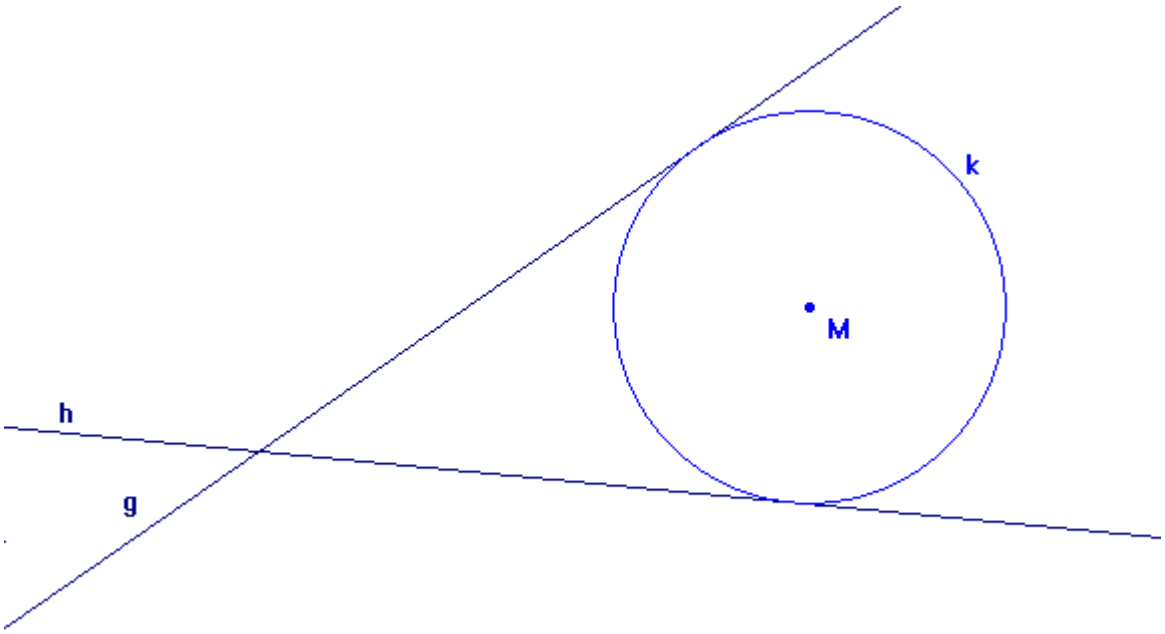


4. Gegeben sind die Geraden g, h und i. Zeichne einen Kreis, der g, h und i berühren.

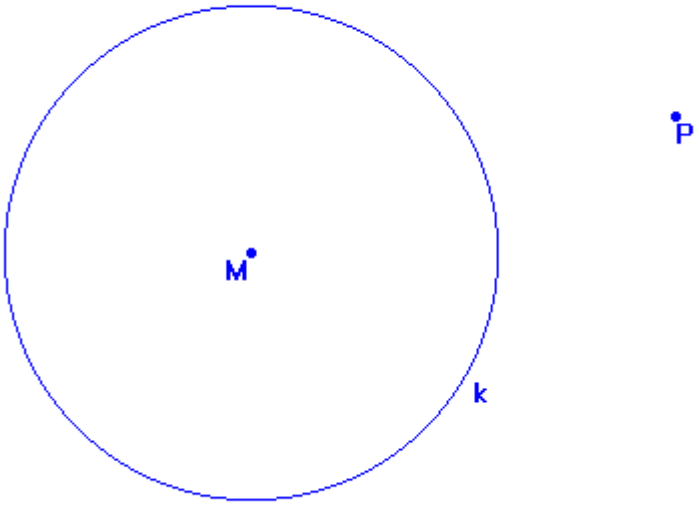


5. Konstruiere alle Geraden, die von einem Punkt A 1cm und von einem Punkt B 3cm Abstand haben.

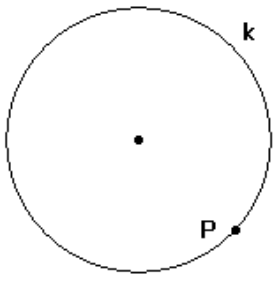
6. Gegeben sind der Kreis k, sowie die Geraden g und h. Konstruiere alle Kreise, die g, h und k berühren.



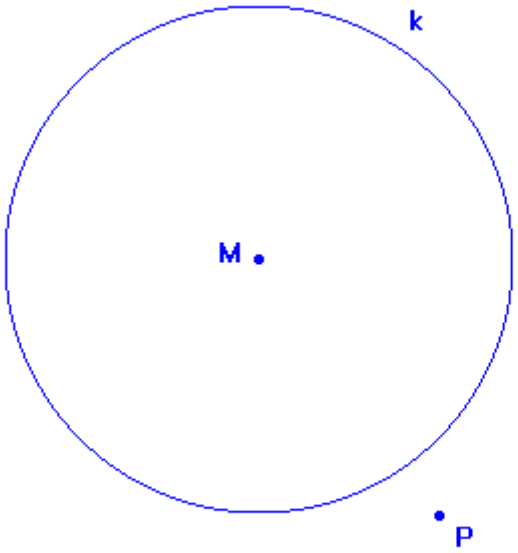
7. Gegeben sind ein Kreis k und der Punkt P. Konstruiere eine Sekante, die durch P geht und die aus dem Kreis eine Sehne von 5cm Länge herausschneidet.



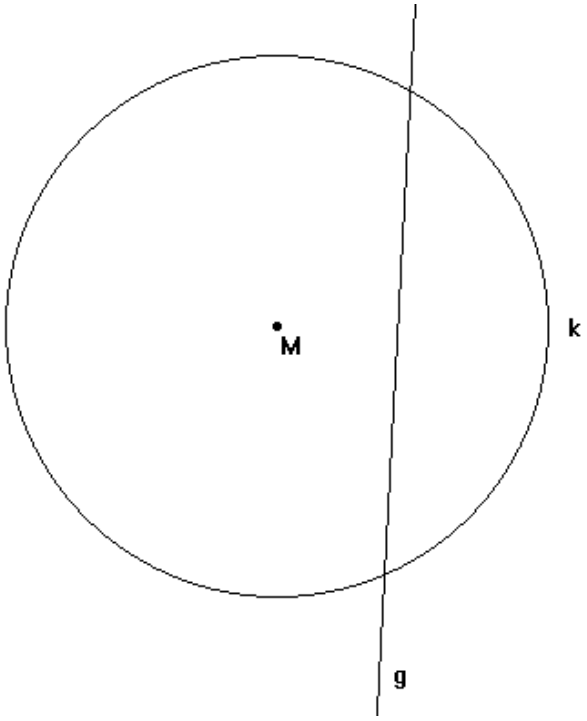
8. Konstruiere alle Kreise, die den Kreis k in P und zudem die Gerade g berühren.



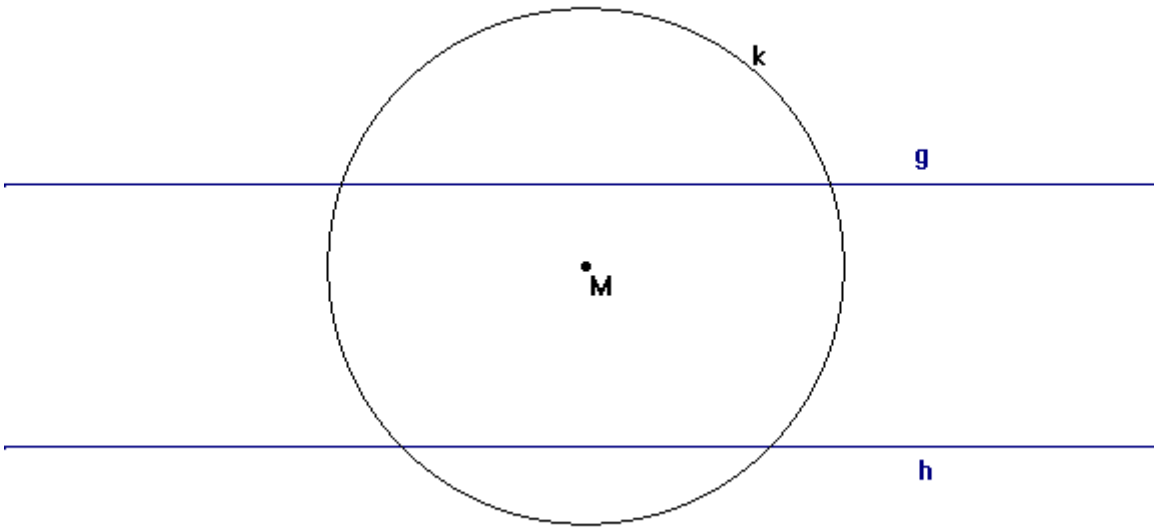
9. Konstruiere alle Kreise mit 2.5cm Radius, welche den gegebenen Kreis k berühren und die durch den Punkt P gehen.



10. Konstruiere alle Kreise mit 1.3cm Radius, welche den Kreis k und zudem die Gerade g berühren



11. Konstruiere alle Kreise, welche die beiden Parallelen Geraden g und h, sowie den Kreis k berühren.



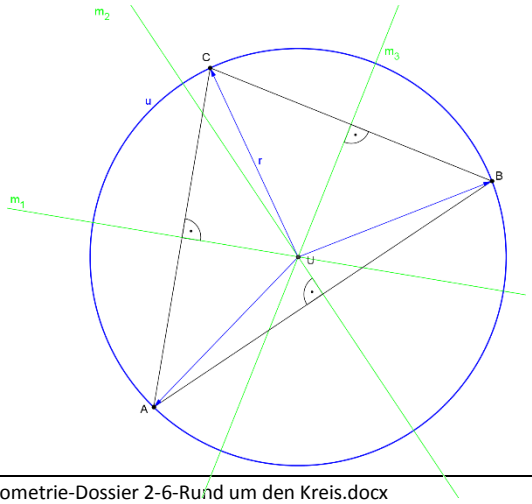
6. In- und Umkreis eines Vieleckes

Ein Vieleck (Polynom) hat – je nach seiner Form – einen Inkreis und einen Umkreis. Es gilt dabei folgende Definition:

- **Ein Vieleck hat einen Umkreis, wenn alle seine Eckpunkte auf einer Kreislinie liegen.**
- **Ein Vieleck hat einen Inkreis, wenn alle seine Seiten Tangenten an einen Kreis sind.**

6.1 Der Umkreis eines Vielecks

6.1.1. *Der Umkreis bei Dreiecken*



- **Jedes Dreieck hat einen Umkreis.**
- **Alle Eckpunkte eines Dreieckes liegen auf dem Umkreis.** Der Umkreismittelpunkt hat also die Eigenschaft, dass er von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt ist.
- **Bei rechtwinkligen Dreiecken ist der Thaleskreis auch der Umkreis!**

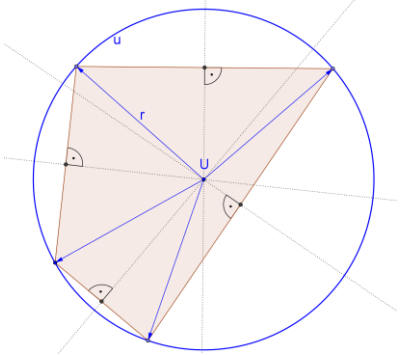
Der Umkreismittelpunkt U ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten.

Der Umkreisradius r_u hat die Länge der Entfernung von U zu einem der drei Eckpunkte. Es gilt UA = UB = UC.

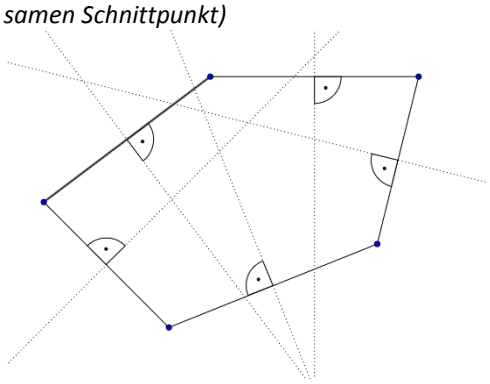
6.1.2. *Der Umkreis bei Vielecken:*

- Vielecke können einen Umkreis aufweisen. Es haben aber nicht alle Vielecke einen Umkreis.
- Bei Vielecken mit Umkreis liegt der Umkreismittelpunkt (ebenfalls) auf dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten.
- Jedes Rechteck und jedes Quadrat (und jedes regelmässige Vieleck) hat einen Umkreis**.**

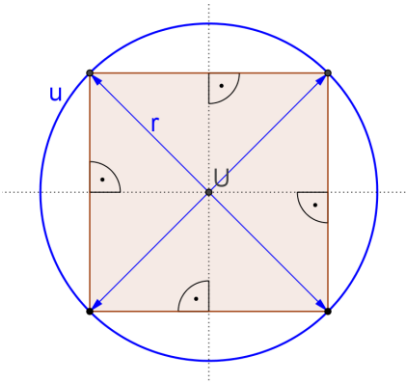
Dieses Viereck hat einen Umkreis
(alle Mittelsenkrechten schneiden sich im Punkt U)



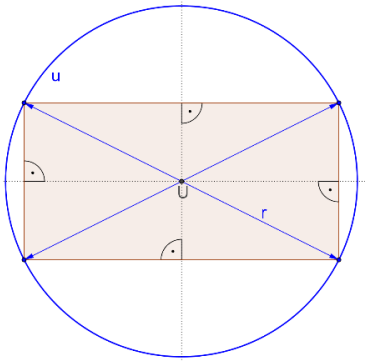
Dieses Fünfeck hat keinen Umkreis
(Die Mittelsenkrechten haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt)



Jedes Quadrat hat einen Umkreis

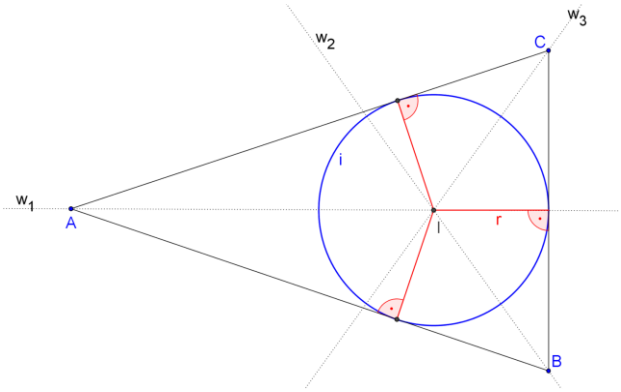


Jedes Rechteck hat einen Umkreis



6.2 Der Inkreis eines Vielecks

6.2.1. *Der Inkreis bei Dreiecken*



- **Jedes Dreieck hat einen Inkreis.**
- **Alle Seiten eines Dreieckes sind Tangenten an den Inkreis.** Der Inkreismittelpunkt hat also die Eigenschaft, dass er von allen drei Dreiecksseiten gleich weit entfernt ist.

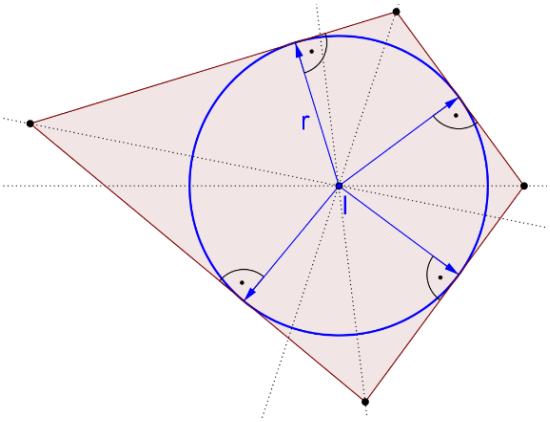
Der Inkreismittelpunkt I ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden aller Dreiecksseiten.

Der Inkreisradius r_i hat die Länge des Abstandes von I zu den Dreiecksseiten (Senkrecht auf die Seite durch I!).

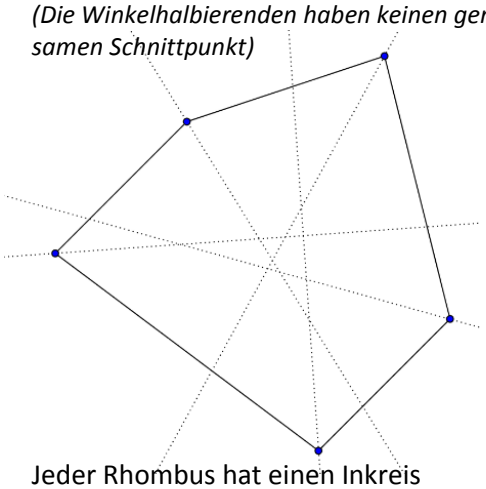
6.2.2. *Der Inkreis bei Vielecken:*

- Vielecke können einen Inkreis aufweisen. Es haben aber nicht alle Vielecke einen Inkreis.
- Bei Vielecken mit Inkreis liegt der Inkreismittelpunkt auf dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden jedes Winkels.
- Jeder Rhombus und jedes Quadrat (und jedes regelmässige Vieleck) hat einen Inkreis**.**

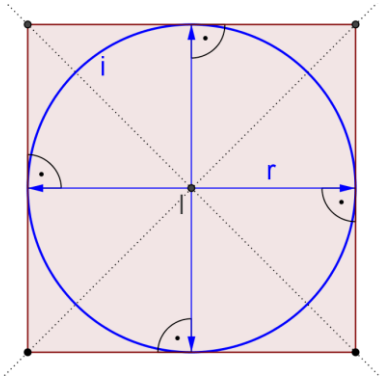
Dieses Viereck hat einen Inkreis
(alle Winkelhalbierenden schneiden sich im Punkt I)



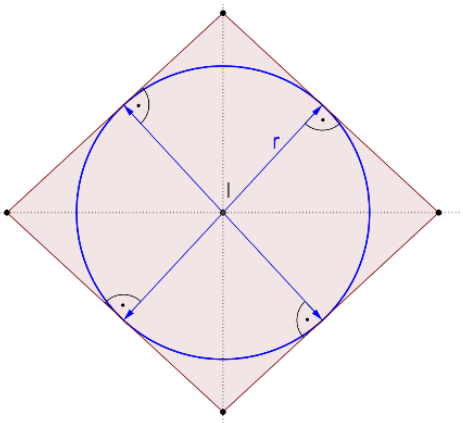
Dieses Fünfeck hat keinen Inkreis
(Die Winkelhalbierenden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt)

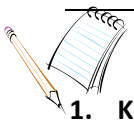


Jedes Quadrat hat einen Inkreis



Jeder Rhombus hat einen Inkreis





Aufgaben Konstruktion mit Inkreis:

1. Konstruiere das Dreieck ABC (ρ = Inkreisradius). Skizziere die Figur vorher.
Gegeben: α = 35°; β = 60°; ρ = 1.5cm

Skizze:	**KB:**

2. Konstruiere das Dreieck ABC (ρ = Inkreisradius). Skizziere die Figur vorher.

Gegeben: b = 4cm; α = 60°; ρ = 1.5cm

Skizze:	**KB:**

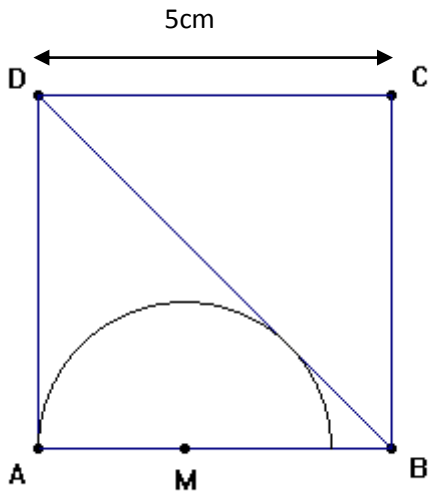
3. Konstruiere das Dreieck ABC (ρ = Inkreisradius). Skizziere die Figur vorher.
Gegeben: β = 35°; ha = 5cm; ρ = 1.5cm

Skizze:	**KB:**

4. Konstruiere das Dreieck ABC (ρ = Inkreisradius). Skizziere die Figur vorher.
Gegeben: c = 5cm; hb = 4cm; ρ = 1.2cm

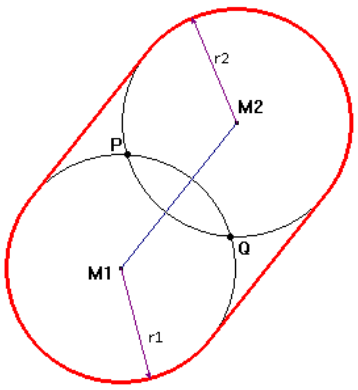
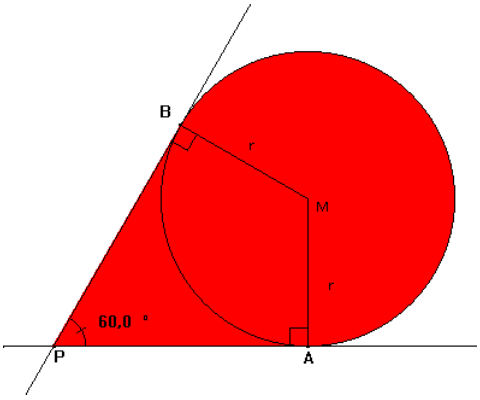
Skizze:	**KB:**

5. Konstruiere die skizzierte Figur im Quadrat ABCD (ohne Skizze, mit KB).



Aufgaben Kreisberechnung

1. Berechne den Umfang der Figur, wenn du weisst, dass $r_1 = r_2$, PQ = 10a und M_1M_2 = 24a.



2. Berechne Umfang und Fläche der Figur