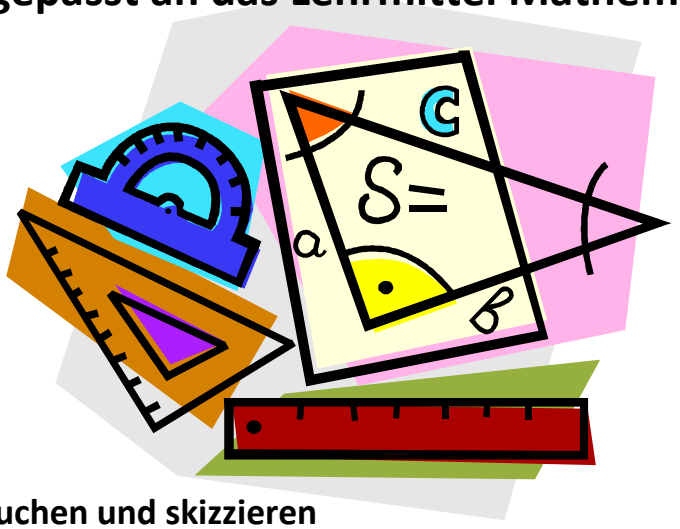
Name:

Geometrie-Dossier

9 – Würfel und Quader

(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 1)



Inhalt:

- **Körper untersuchen und skizzieren**
- **Einfache Schnittflächen in Würfel und Quader**
- **Schwierige Schnittflächen in Würfel und Quader (Zusatzinfos – nicht im LM)**
- **Volumenberechnung in Würfel und Quader**
- **Oberflächen in Würfel und Quader**
- **Oberflächenberechnung bei Würfelkörpern**

Online findest du dieses und andere Dossiers unter www.andiraez.ch/schule

---

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

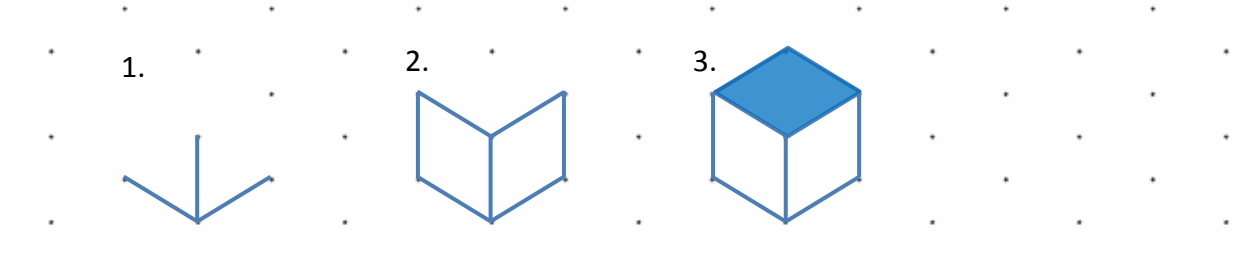
Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Konstruktionen: *Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
Skizzen: Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.

1. Körper untersuchen und skizzieren

Im Kapitel 4 – „Körper und ihr Aufbau“ haben wir bereits gelernt, dass Körper als Raumbild dargestellt werden können. Zudem haben wir mit den drei „Rissen“ (Grundriss, Aufriss, Seitenriss) gearbeitet, um die räumlichen Körper auf einem Blatt darstellen zu können. Eine weitere Darstellungsart ist die Darstellung auf dem Punktepapier. Dabei werden die Körper skizziert. Einzelne Würfel können auf dem Punktepapier angenehm und schnell skizziert werden (Allerdings gilt auch beim Skizzieren: Sorgfältig und sauber, am besten mit Lineal oder Geodreieck arbeiten!).

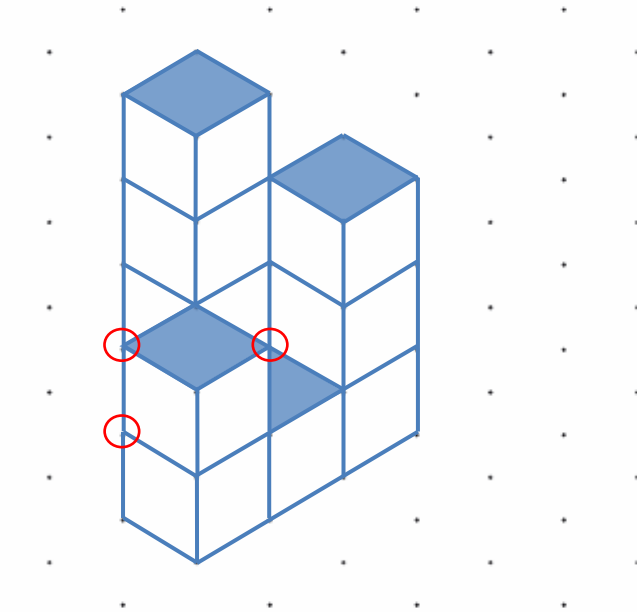
1.1 Skizzieren auf Punktepapier



Das „Punktepapier“ bringt den grossen Vorteil, dass man immer von Punkt zu Punkt verbinden – und direkt die Masse und Distanzen optisch stimmen. Alle sichtbaren Kanten sind in dieser Darstellung gleich lang (Dies erklärt den Namen dieser Darstellung: Isometrie, welcher „Gleichmass“ bedeutet).

Die unsichtbaren Kanten werden hier nicht gezeichnet, **dafür muss die Fläche, welche von oben sichtbar ist, schraffiert werden**. So ist der Würfel besser erkennbar.

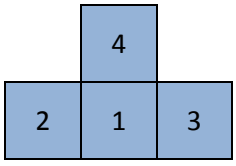
Bei dieser Darstellung besteht aber auch das Problem, dass einzelne räumlich verschiedene Punkte zusammenfallen. Die Körper müssen also genau betrachtet und studiert werden!



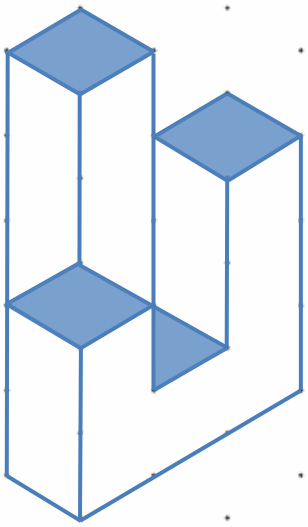
In diesem Beispiel sind die „heiklen“ Punkte rot eingekreist. An diesen Stellen fallen auf der Darstellung mehrere Punkte, die in Wirklichkeit weit auseinander liegen, zusammen.

1.2 Der Bauplan eines Würfelkörpers

Neben den im Dossier 4 „Körper und ihr Aufbau“ gezeigten Rissen, wird der Bauplan für die Würfelkörper – wenn man sie im Schrägbild oder auf Punktpapier skizzieren will – verwendet. Der Bauplan entspricht dem Grundriss des Würfelkörpers (➔ Ansicht von oben). Zusätzlich wird im Bauplan notiert, wie viele Würfel aufeinandergestapelt werden. „Unser“ Würfelkörper hat also folgenden Bauplan:



Den gleichen Bauplan hat auch dieser Würfelkörper. Bei diesem Beispiel wurden die Würfel „verputzt“, d.h. man sieht die einzelnen Würfel nicht mehr!



Hier handelt es sich um den identischen Würfelkörper, der allerdings „verputzt“ wurde.

Aufgaben „Körper skizzieren“:

1. Skizziere die Würfelkörper, deren Bauplan hier gezeigt ist:

a) nicht verputzt

3		
1		3
2	1	2

b) nicht verputzt

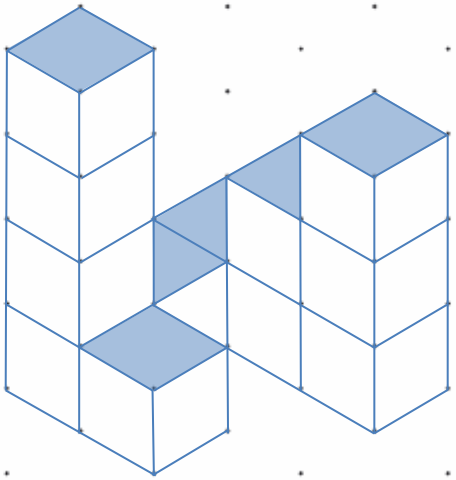
1		
2	4	
3		2

c) verputzt

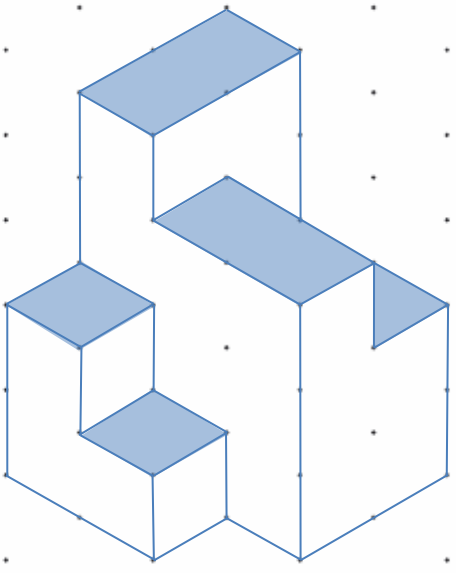
2		3
1	2	1

2. Zeichne den Bauplan der skizzierten Würfelkörper:

a)



b)

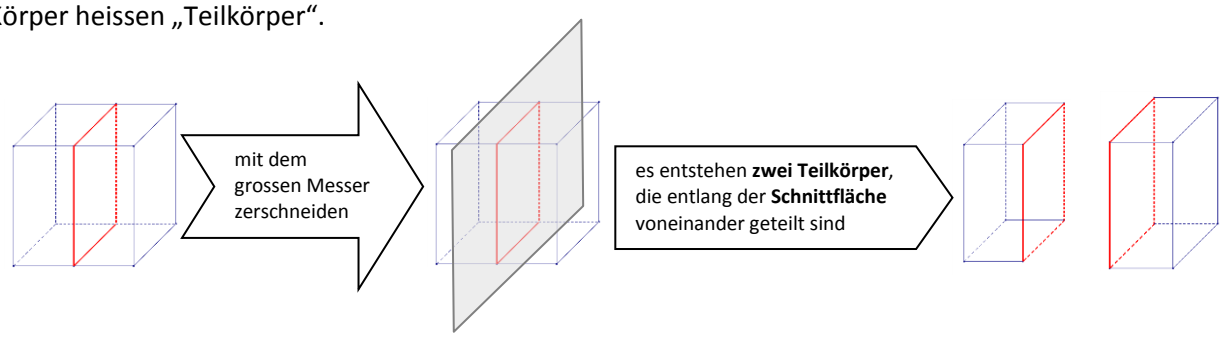


2. Schnittflächen in Würfel und Quader

2.1 Schnittflächen und Teilkörper am Beispiel des Würfels

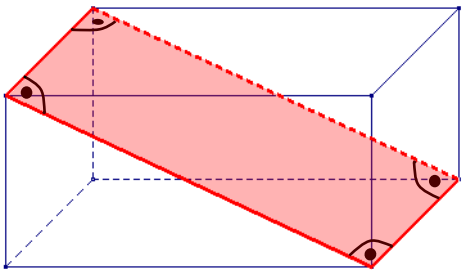
Ein Würfel kann mit einem geraden Schnitt in zwei Teilkörper zerschnitten werden – ganz so, wie du ein grosses Stück Butter oder einen feinen Schokoladenkuchen mit einem Messer in zwei Teile teilen kannst.

Mit dem grossen Messer kann man also den Würfel in zwei Teile zerschneiden. Und die eingezeichnete Ebene heisst dann „**Schnittebene**“ – also dort, wo das Messer den Würfel zerteilt. Die beiden „neuen“ Körper heissen „Teilkörper“.



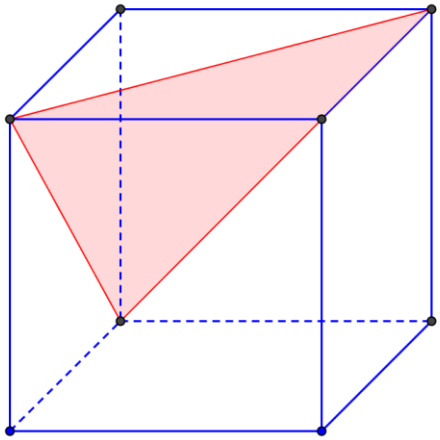
2.2 Schnittflächen sind im Raumbild verzerrt

Wie du sicherlich noch weisst, sind Raumkörper im Schrägbild verzerrt dargestellt. Entsprechend können wir uns zwar die Form und Lage von Schnittflächen dank des Raumbildes vorstellen, doch die wahre Form dieser Schnittflächen können wir nur „erahnen“:



Die hier dargestellte Schnittfläche muss in Wahrheit ja ein Rechteck sein (weil ja der Winkel zwischen Vorderfläche des Quaders und der Deckfläche 90° beträgt).

Wir müssen also beachten, dass Winkel und zum Teil auch Strecken der Schnittflächen verzerrt und nicht in ihrer richtigen Grösse dargestellt werden.



In diesem Würfel wurde eine dreieckige Schnittfläche erzeugt, indem in drei Seitenflächen diagonal geschnitten wurde. **Das Dreieck, welches die Schnittfläche bildet, hat also drei gleich lange Seiten und ist demzufolge gleichseitig. Die Winkel betragen somit 60°.**

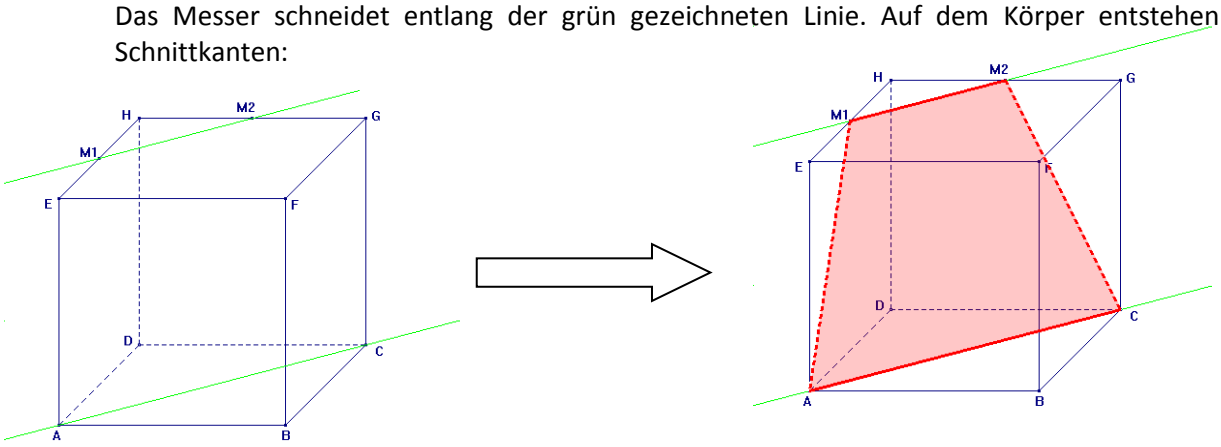
Dies erkennen wird aber im Raumbild optisch nicht. Nur durch sorgfältiges Studieren der Figur wird klar, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt.

2.3 Schnittflächen in Würfel und Quader einzeichnen:

Die Grundidee der Schnittflächen ist – wie oben angetönt – das „Zerschneiden“ eines Körpers mit einem grossen Messer. Dies führt dazu, dass die entstehenden Schnittflächen ganz bestimmten Regeln folgen:

1. Es dürfen nur Punkte in der gleichen Fläche miteinander verbunden werden (➔ Schnittkanten auf dem Körper)
2. In parallelen Flächen sind die Schnittkanten parallel.
3. Man darf auch „über den Körper“ hinaus arbeiten und Kanten verlängern, um Schnittflächen zu finden.

Das Messer schneidet entlang der grün gezeichneten Linie. Auf dem Körper entstehen jetzt Schnittkanten:



Punkte in gleicher Fläche können verbunden werden:

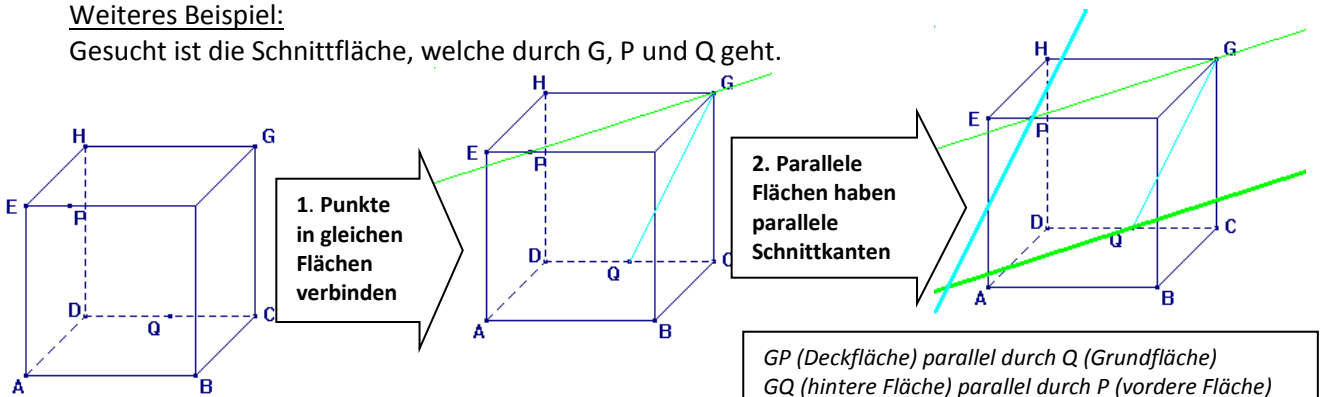
- AM1 (liegen in der linken Seitenfläche): Dort schneidet das Messer in den Körper hinein
- M1M2 (liegen in der Deckfläche): Dieser Kante entlang wird der Körper durchtrennt
- AC (liegen in der Grundfläche): Dieser Kante entlang wird der Körper durchtrennt
- M2C (liegen in der hinteren Fläche): Dort wird das Messer den Körper wieder verlassen.

In parallelen Flächen entstehen parallele Schnittkanten:

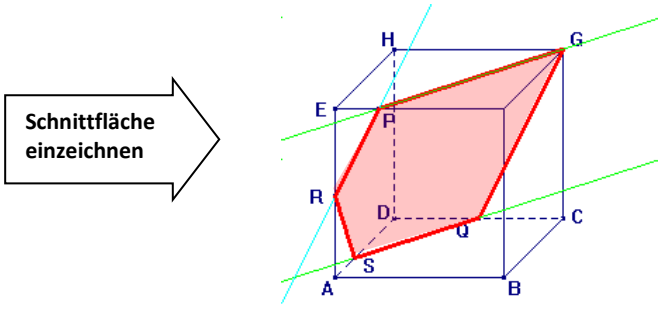
- M1M2 und AC parallel zueinander (weil das Messer nicht „verbiegbar“ ist)

Weiteres Beispiel:

Gesucht ist die Schnittfläche, welche durch G, P und Q geht.



GP (Deckfläche) parallel durch Q (Grundfläche)
GQ (hintere Fläche) parallel durch P (vordere Fläche)

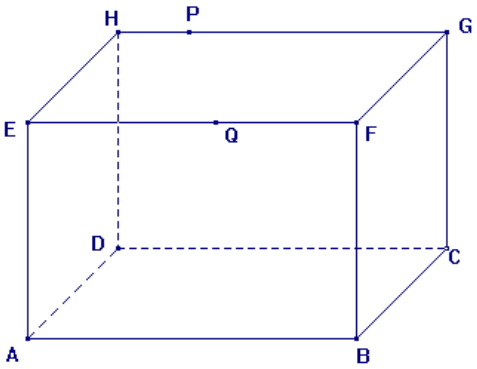


- *Auf der Kante AD entsteht der Punkt S, auf der Kante AE der Punkt R.*
- *Diese beiden dürfen verbunden werden, weil sie in der linken Seitenfläche liegen.*
- *SQ können verbunden werden, da sie in der Grundfläche liegen*
- *RP liegen in der vorderen Fläche.*

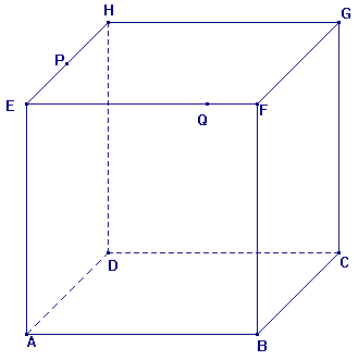
Aufgaben „Schnittflächen einzeichnen“:

1. Zeichne in den Raumbildern die Schnittflächen ein:

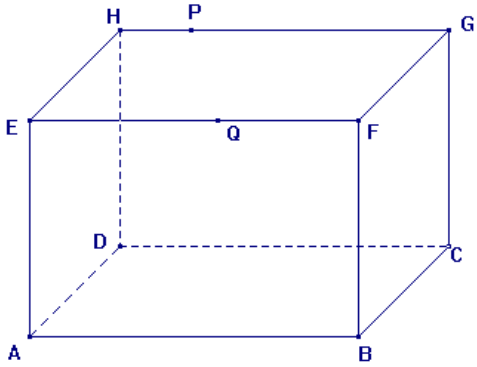
a) Die Schnittfläche geht durch P, Q und D



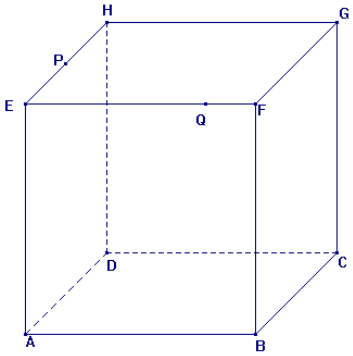
b) Die Schnittfläche geht durch P, Q und D



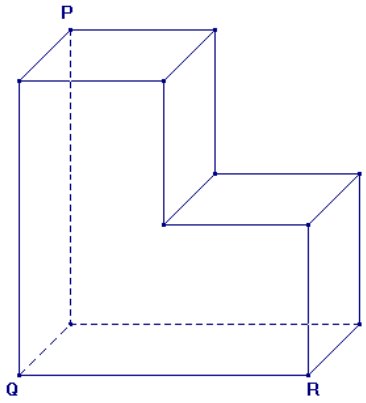
c) Die Schnittfläche geht durch P, Q und D



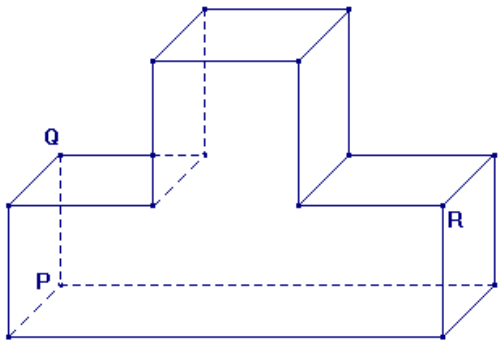
d) Die Schnittfläche geht durch P, Q und D



e) Die Schnittfläche geht durch P, Q und R

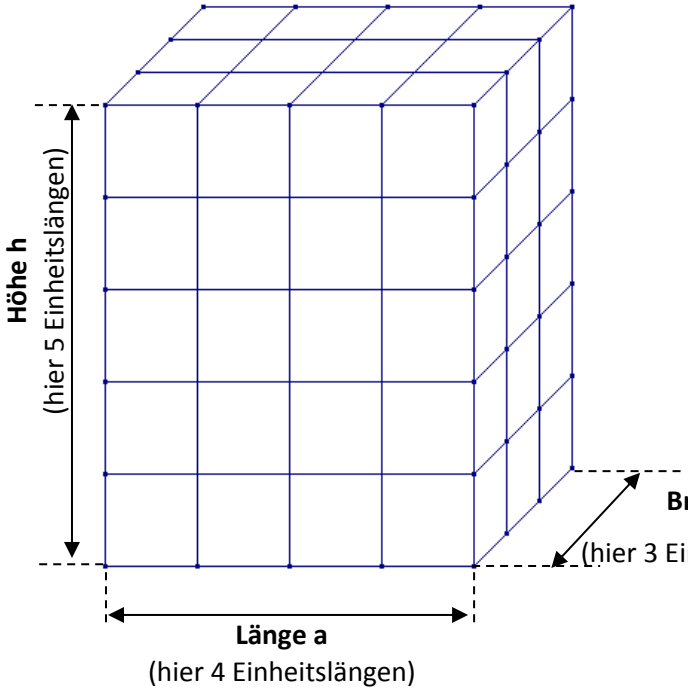


f) Die Schnittfläche geht durch P, Q und R



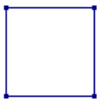
3. Die Berechnung von Oberfläche und Volumen eines Raumkörpers

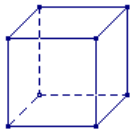
3.1 Der Raumkörper wird in lauter gleich grosse Teilwürfelchen zerlegt



Die Einheitswürfelchen haben folgende Dimension:

Einheitslänge (z.B. 1 cm) (Strecke)


Einheitsfläche (z.B. 1 cm^2) (Fläche)


Einheitsvolumen (z.B. 1 cm^3) (Rauminhalt)

(Der Einfachheit halber ist dieser Raumkörper ohne die unsichtbaren Kanten gezeichnet)

3.2 Das Volumen (V vom Begriff „Volumen“) / Rauminhalt eines Körpers

Ein Körper nimmt – wenn man ihn irgendwo hin stellt – einen Teil des Raumes ein. Dieser „**Rauminhalt**“ heisst **Volumen des Körpers**. **Das Volumen entspricht der Anzahl Einheitswürfelchen, die im Körper einhalten sind. Es berechnet sich durch Länge mal Breite mal Höhe des Körpers.**

In diesem Beispiel beträgt die Länge 4 (Einheitslängen, z.B. cm), die Breite 3 (Einheitslängen, z.B. cm) und die Höhe misst 5 (Einheitslängen, z.B. cm).

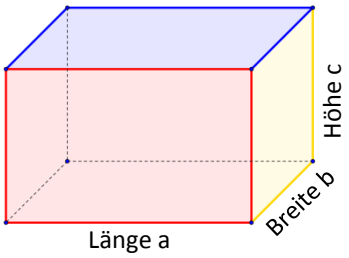
Das **Volumen** (V) ist also: **Länge • Breite • Höhe** = 4 • 3 • 5 = 12 • 5 = **60 cm^3**

Volumen V = Grundfläche • Höhe = (4 • 3) • 5 = 12 • 5 = **60 cm^3**

Volumen eines Quaders

(mit den Kantenlängen a, b, c)**:**

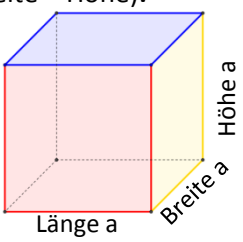
Volumen V = Länge • Breite • Höhe = a • b • c
Volumen V = Grundfläche • Höhe = (a • b) • c



Volumen des Würfels

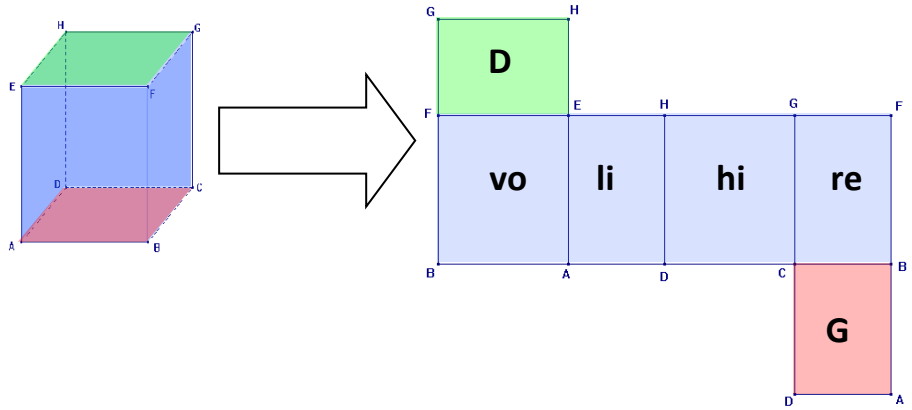
(mit der Kantenlänge a, denn da sind ja alle „Kanten“ gleich, also Länge = Breite = Höhe)**:**

Volumen V = Länge • Breite • Höhe = a • a • a = a^3
Volumen V = Grundfläche • Höhe = (a^2) • a = a^3



3.3 Die Oberfläche (S, vom Begriff „Surface“) des Körpers

Die Oberfläche S ist die Fläche, die der Bastelbogen (das Netz) des Körpers belegt. Die Oberfläche kann bemalt werden und sie wird nass, wenn man den Körper in Wasser eintaucht.



Im Quadernetz kann man jetzt einfach erkennen, dass sich die Oberfläche aus den sechs Flächen des Quaders zusammensetzt. Man kann also festhalten:

D + G + vo + hi + re + li

Oberfläche S =Deckfläche + Grundfläche + $\text{Seitenfläche}_{\text{vorne}}$ + $\text{Seitenfläche}_{\text{hinten}}$ + $\text{Seitenfläche}_{\text{rechts}}$+$\text{Seitenfläche}_{\text{links}}$

D + G + vo + hi + re + li

Oberfläche S = Deckfläche + Grundfläche + Mantelfläche

Die Mantelfläche kann man aus dem Umfang der Grundfläche und der Höhe des Körpers berechnen.

Mantelfläche M	**=**	**Umfang der Grundfläche • Höhe**
	=	**2(a + b) • h**

In diesem Beispiel beträgt die Länge 4 (Einheitslängen, z.B. cm), die Breite 3 (Einheitslängen, z.B. cm) und die Höhe misst 5 (Einheitslängen, z.B. cm).

Die **Oberfläche** ist also: Deckfläche + Grundfläche + Seite vo + Seite hi + Seite re + Seite li

Oberfläche S	**=**	4 • 3	+	4 • 3	+	4 • 5	+	4 • 5	+	3 • 5	+	3 • 5
	=	12	+	12	+	20	+	20	+	15	+	15
	=	**94 cm²**										

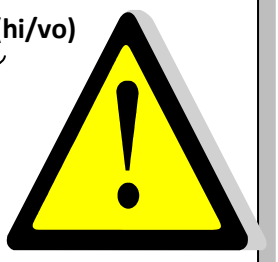
Oberfläche des Quaders

(mit den Kantenlängen a, b, h):

Oberfläche S = 2 • Grundfläche + 2 • Seitenfläche(li/re) + 2• Seitenfläche (hi/vo)

= 2 • Grundfläche + Mantelfläche

Oberfläche S	**= 2 • (a • b)**	**+**	**2 • (b • h) + 2 • (a • h)**
	= 2 ab	**+**	**(2a +2b) • h**



Oberfläche des Würfels:

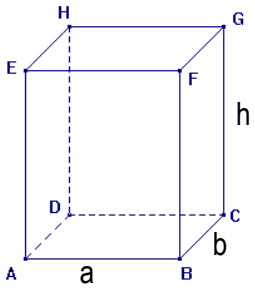
(mit der Kantenlänge a, denn da sind ja Kanten gleich, also Länge = Breite = Höhe):

Oberfläche S = 6 • a • a = 6 a²

Aufgaben Volumen und Oberflächenberechnungen in Quader und Würfel:

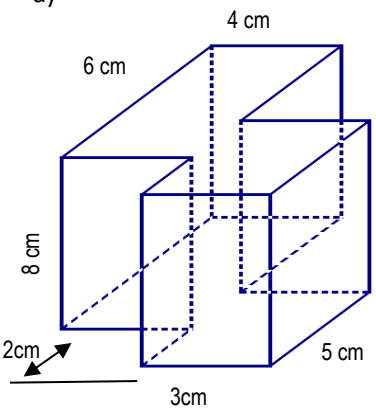
1. Bestimme die fehlenden Grössen eines Quaders (Betrachte den nebenstehenden Quader als Muster).

	Länge a	*Breite b*	*Höhe h*	*Oberfläche*	*Volumen*
a)	2 cm	4 cm	9 cm		
b)	5 cm	8 cm			100 cm^3
c)	3 cm		4 cm		72 cm^3
d)		4 cm	6 cm		60 cm^3
e)				150 cm^2 (Würfel)	
f)				216 cm^2 (Würfel)	

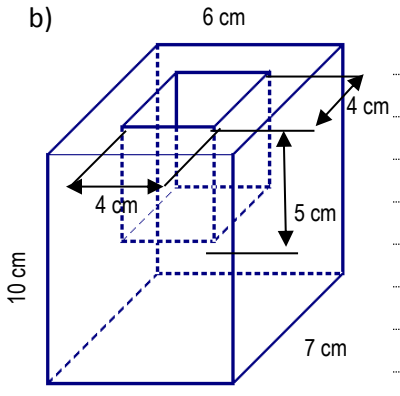


2. Berechne die Oberfläche und das Volumen der abgebildeten Restkörper:

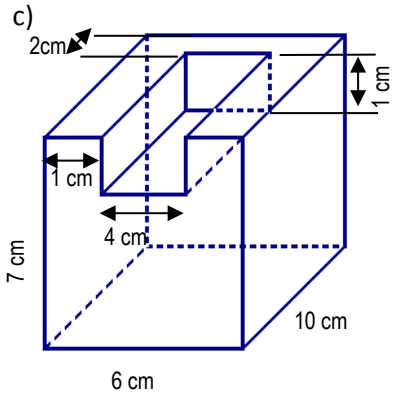
a)



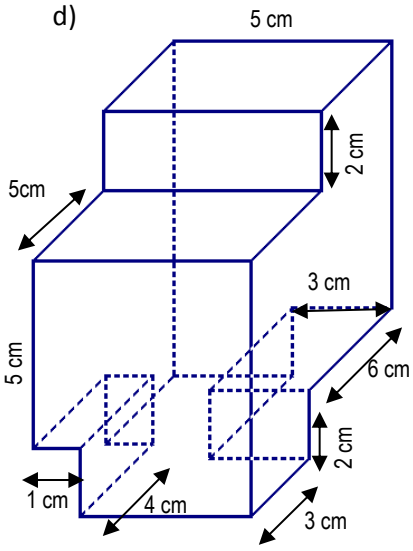
b)



c)



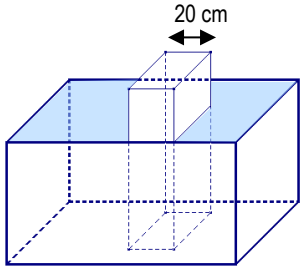
d)



3. Ein Quader (20cm lang, 75 cm hoch und 30cm breit ist) steht in einer vollen Wasserwanne (Höhe: 50cm, Länge: 100cm; Breite: 50cm).

a. Wie stark sinkt der Wasserspiegel, wenn der Quader aus der Wanne entfernt wird?

b. Wie stark steigt der Wasserspiegel (wie viel cm ist die Wanne zu tief), wenn der ganze Quader ins Wasser gelegt wird?

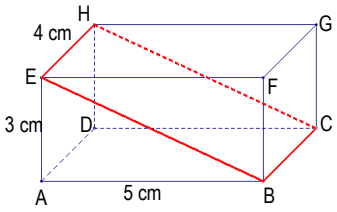


Zusatzinformation
(In diesem Kapitel nicht im Lehrmittel enthalten)

4. Konstruktion von Flächen und Strecken in wahrer Form und Grösse

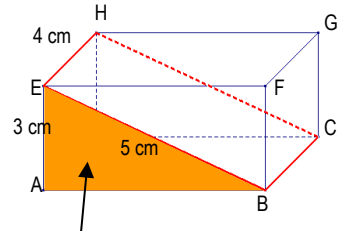
4.1 Schnittflächen in wahrer Form und Grösse konstruieren

Wie wir alle mittlerweile wissen, sind Raumkörper im Schrägbild verzerrt dargestellt. Entsprechend können wir uns zwar die Form und Lage von Schnittflächen dank des Raumbildes vorstellen, doch die wahre Form dieser Schnittflächen können wir nicht erahnen. Entsprechend muss man diese wahre Form konstruieren. Dies geschieht mittels einer speziellen Konstruktion:



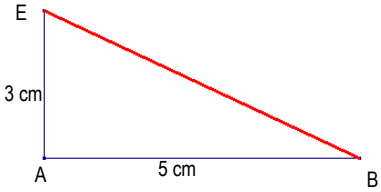
Die hier dargestellte Schnittfläche muss in Wahrheit ja ein Rechteck sein (weil ja der Winkel zwischen Vorderfläche des Quaders und der Deckfläche 90° beträgt).

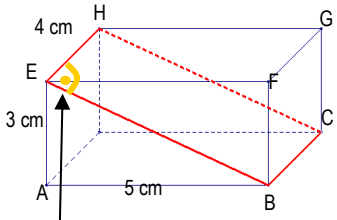
Bei der Konstruktion dieser Schnittfläche in wahrer Form und Grösse ist es uns aber nicht erlaubt, irgendwelche nicht gegebenen Strecken zu verwenden. Wir müssen uns also an die Kantenlängen des Quaders halten und von dort aus alles konstruieren. *(Achtung: Die genauen Masse stimmen hier nicht)*



1:
Dreieck suchen

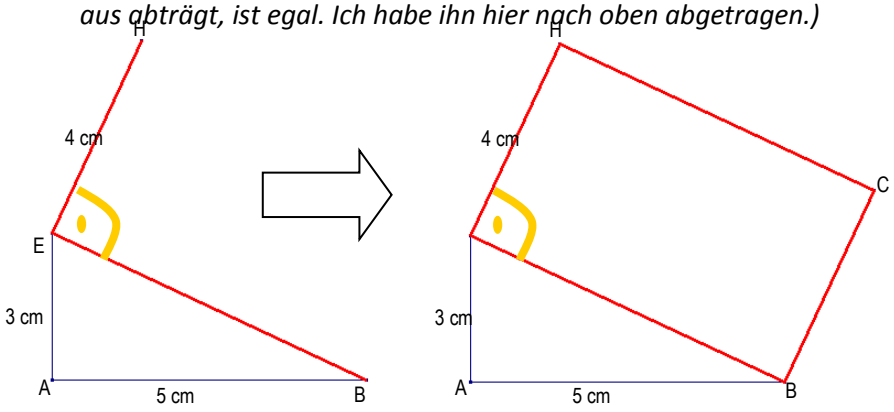
1. Versuchen wir, die Kantenlänge der Schnittfläche in einem Dreieck zu sehen, von dem wir zwei Seitenlängen kennen → Hier im rechtwinkligen Dreieck ABE. Dieses Dreieck lässt sich sehr einfach konstruieren und wir finden wir wahre Länge von EB als längste Seite im rechtwinkligen Dreieck.





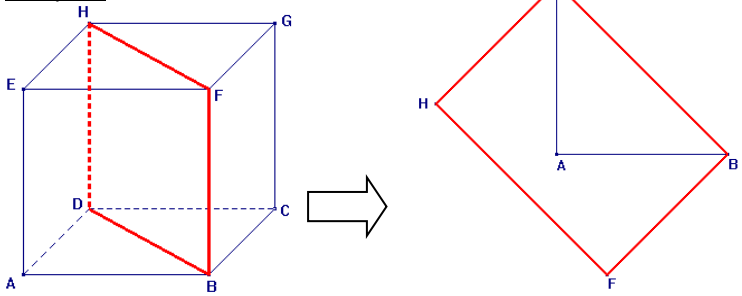
2:
Winkel beachten

2. Der Winkel zwischen EB und EH ist 90°. Dies können wir in unserer Zeichnung verwenden um das Schnittrechteck EBCH fertig zu zeichnen. *(Ob man jetzt den 90°-Winkel nach oben oder unten von E aus abträgt, ist egal. Ich habe ihn hier nach oben abgetragen.)*



3. Auf diese Art gelingt es uns, jede Fläche aus dem Raumbild in ihrer wahren Form und Grösse zu zeichnen.

Beispiel:



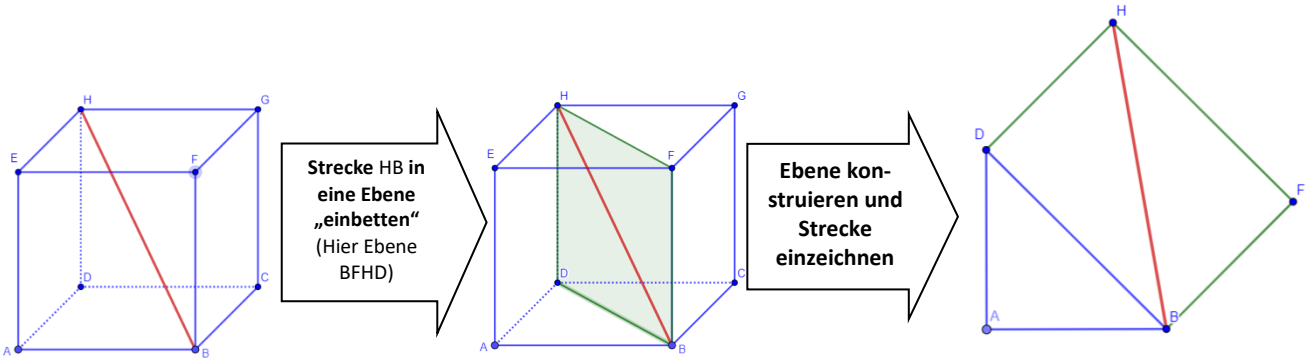
- Zuerst das Dreieck ABD (rechtwinklig)
- Danach den rechten Winkel zwischen BD und DH eintragen
- parallel verschieben
- fertig.

Zusatzinformation
(In diesem Kapitel nicht im Lehrmittel enthalten)

4.2 Konstruktion von Strecken in wahrer Grösse

Für die Konstruktion von Strecken in wahrer Grösse brauchen wir zuerst eine entsprechende Ebene, in welcher die Strecke liegt (→ oder anders ausgedrückt: Wenn wir eine Schnur durch einen Quader spannen (=Strecke) müssen wir eine Schnittebene finden (= Karton), in welcher diese Strecke liegt):

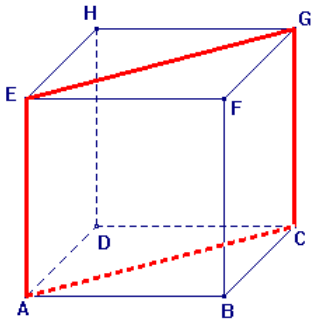
Für die Konstruktion von Strecken müssen wir sie zuerst in eine Ebene „einbetten“ und diese Ebene in wahrer Form konstruieren. Danach können wir die gesuchte Strecke einzeichnen.



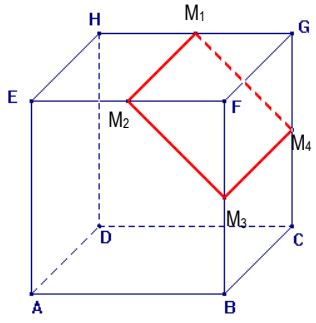
Aufgaben Konstruktion von Flächen und Strecken in wahrer Form und Grösse:

1. Konstruiere die Schnittfläche in wahrer Form und Grösse:

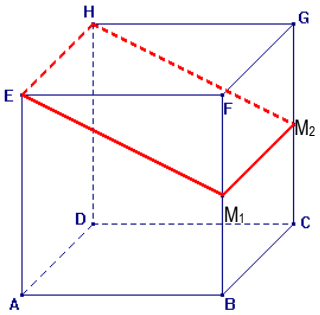
a) Würfel-Kantenlänge: 3 cm



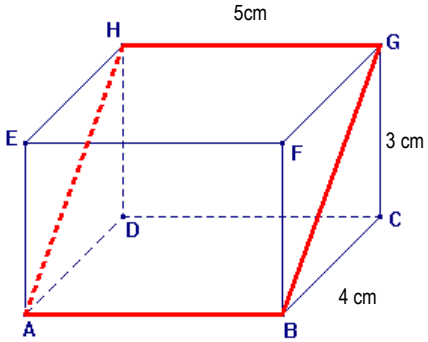
b) Würfel-Kantenlänge: 4cm (M: Mittelpunkte der Würfelkanten)



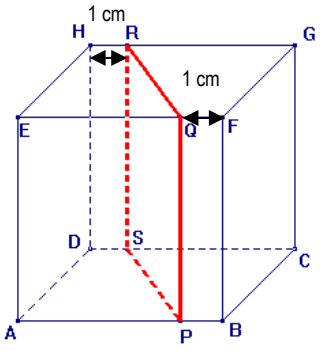
c) Würfel-Kantenlänge: 4cm (M: Mittelpunkte der Würfelkanten)



d) Quader mit Länge 5cm, Breite 4cm und Höhe 3cm

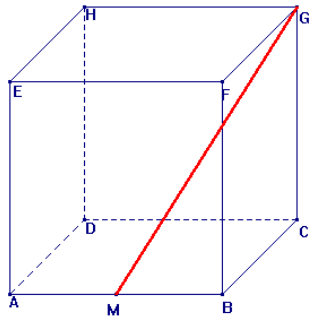


e) Würfel-Kantenlänge: 4cm

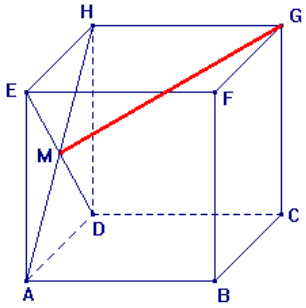


2. Zeichne im Raumbild eine geeignete Schnittebene ein, in welcher die gesuchte Strecke vollständig enthält. Konstruiere danach die gesuchte Strecke in wahrer Grösse:

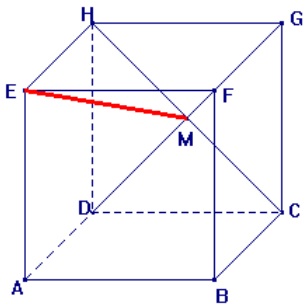
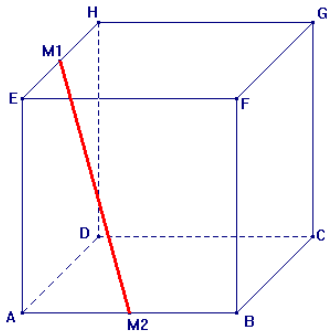
a) Würfel-Kantenlänge: 3 cm (M: Mittelpunkte der Würfelkanten)



b) Würfel-Kantenlänge: 4 cm (M: Mittelpunkte der Seitenfläche)



c) Würfel-Kantenlänge: 4 cm (M: Mittelpunkte der Seitenfläche)



d) Würfel-Kantenlänge: 3 cm (M: Mittelpunkte der Würfelkante)