Name:


# Mathematik-Dossier
# 2 – Die Welt der natürlichen Zahlen – Teil B
**(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 1)**

## Inhalt:

## Themenbereich 2b (Variablen)

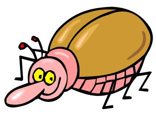
- **Grundsätzliches zum Rechnen mit Variablen**
- **Koeffizienten**
- **Grundoperationen mit Variablen**
- **Ordnung im Algebra-Term**

## Themenbereich 2c (Teiler, Vielfache und Primzahlen)

- **Teilbarkeit von natürlichen Zahlen (Vielfache und Teiler)**
- **Primzahlen**
- **Primfaktorzerlegung**
- **Der grösste gemeinsame Teiler (ggT) / Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)**

## Verwendung:

*Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.*

*einfache Aufgaben sind mit einem*  *gekennzeichnet*

*schwierigere Aufgaben sind mit einem*  *gekennzeichnet.*

*Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.*

**Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.**

# 1. Von der Arithmetik zur Algebra oder: „Was bringt Algebra“

## 1.1. Was ist Algebra überhaupt?

Um überhaupt verstehen zu können, welche Vorteile die Algebra gegenüber der Arithmetik hat, müssen wir zuerst einmal wissen, was Algebra überhaupt ist.

Zuerst zu den Begriffen:

- **Arithmetik** bedeutet soviel wie **„Rechnen mit Zahlen“** oder Zahlrechnen.
- **Algebra** dagegen bedeutet „**Rechnen mit Buchstaben**“ oder Buchstabenrechnen.

*Die Algebra rechnet also nicht mehr nur mit Zahlen, vielmehr kommen in den Rechnungen sowohl Zahlen, wie auch Buchstaben vor.*

Ein algebraischer Term heisst also zum Beispiel: 4a + 4b – 14a

## 1.2 Vorteile beim Rechnen mit Algebra.

- **Dank Algebra können wir Dinge in allgemeiner Weise mitteilen / kommunizieren**
- **Algebra hilft, Probleme (in allgemeiner Art) zu lösen**
- **Algebra hilft, um Begründungen und Beweise für Sachverhalte zu liefern**

**Die Grundidee ist ganz einfach: Statt Zahlen stehen Variablen, die bei Bedarf wieder mit frei wählbaren Zahlen ersetzt werden können**

Das heisst also, dass ich eine Berechnung (z.B. für die Entwicklung eines Preises, für die Betrachtung eines Gewinnes von einem Unternehmen) unabhängig von effektiven Zahlwerten durchführen kann. Dies bedeutet, dass ich alle Einflüsse zwar berücksichtige, aber eben als „Variable“ und nicht als „nackte Zahl“. So kann ich lange rechnen und Vereinfachen und werde erst ganz am Schluss die entsprechenden Zahlen einsetzen. Die Rechnung muss dann für alle möglichen Zahlen nur einmal gemacht werden. Am Schluss wird eingesetzt und geschaut, was **sich am besten eignet.**

## 1.3 Beispiele für Algebra

Der Mensch strebt dazu, möglichst allgemeingültige Gesetze und Regeln aufzustellen. So haben sich die Mathematiker bemüht, ebenfalls diesen Weg einzuschlagen. Ihre Idee war es, statt Zahlen Buchstaben (=Variablen) zu verwenden, um damit anzudeuten, dass nicht „Einzelfälle“, sondern „Allefälle“ bearbeitet werden können.

→ Algebra hilft für allgemeine Formulierungen (z.B. Zahl und Gegenzahl: x → (-x)
→ Algebra produziert allgemeingültige Aussagen (z.B. Doppeltes der Zahl: x → 2x)
→ Algebra liefert damit bessere Argumente, hilft beim Problemlösen

| *allgemeingültige Regel* | **Beispiele mit Zahlwerten** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | **5** | (-2) | ***(-3)*** | *2* | ***(-23)*** | *11* |
| 2•x | 10 | **(-4)** | (-6) | **4** | (-46) | **22** |

**Hier wird in einfacher Weise gezeigt: „Doppeltes der Zahl“**

Hilfe beim „Rätsel lösen“: Drei Säcke voller Birnen stehen vor dir. Im zweiten Sack sind 7 Birnen mehr als im ersten, im dritten Sack hat es viermal so viele Birnen wie im ersten.

| Sack 1 | Sack 1 | Sack 3 | Insgesamt |
|---|---|---|---|
| **x** | x + 7 | 4x | x+x+7+4x=**<u>6x+7</u>** |

Verankerung (Festlegen)          hängt ab von der Variable x

Sobald jetzt bekannt ist, wie viele Birnen im ersten Sack sind, können wir für dieses Beispiel die ganze Anzahl Birnen sofort bestimmen. (➔ Im ersten Sack sind 20 Birnen → Total sind es also 6•20 + 7 = 127 Birnen).

## 1.4 Die Koeffizienten (="Vorzahlen")

In algebraischen Termen finden wir vielfach Dinge wie 3x, 6y, 34xy oder ähnliches. Dahinter versteckt sich eigentlich nichts anderes als eine Multiplikation. Da diese sowieso stärker ist als eine Addition oder Subtraktion, **schreiben wir zwischen Zahlen und Buchstaben oder zwischen verschiedenen Buchstaben das Multiplikationseichen nicht mehr.**

Wir wissen: $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$ (Definition der Multiplikation)
somit $3 \cdot x = x + x + x$
vereinfacht $3x = x + x + x$

ebenso: $y = 1y = 1 \cdot y$ und $(-y) = (-1y) = (-1) \cdot y$

**Vereinbarung:** Wir schreiben $3 \cdot x$ als $3x$ und entsprechend $(-3) \cdot x$ als $(-3x)$

**WICHTIG: Koeffizienten (Vorzahlen) sind mit der Variable durch eine MULTIPLIKATION verknüpft, das Multiplikationszeichen wird einfach aus Gründen der Vereinfachung nicht geschrieben.**

## 1.5 Grundoperationen mit Variablen

### *1.5.1 Addition und Subtraktion*

In algebraischen Termine kommen mehrere unterschiedliche Familien vor:

Im Term 15a – 2b + 23a – 2ac + 4b + 32ac -10a

hat es die Familie „a", die Familie „b" und dann noch die Familie „ac"). Beim Addieren und Subtrahieren dürfen ausschliesslich die gleichen Familien miteinander verrechnet werden. Daher ist es besonders wichtig, die Übersicht über diese „Familien" zu behalten. Am Besten ist es daher, alle gleichartigen Familien-Operatoren zu markieren, zu ordnen und dann einzeln zu rechnen.

Farbig markiert zeigt sich:
15a – 2b + 23a – 2ac + 4b + 32ac – 10a

Somit können wir die Operatoren ordnen:
15a + 23a – 10a + 4b – 2b + 32ac – 2ac ➔ ➔

*Jetzt dürfen wir innerhalb der einzelnen „Familien" im Kopf rechnen:*

| | | |
|---|---|---|
| *15a + 23a – 10a* | *= a (15+23-10)* | *= 28a* |
| *+4b – 2b* | *= b (+4 – 2)* | *= +2b* |
| *+32ac – 2ac* | *= ac (+32-2)* | *= +30ac* |

Somit sieht das Ergebnis so aus:
28a + 2b + 30ac

**Geordnet nach dem Alphabet:**
28a + 30ac + 2b

⇨ **Da jetzt keine „gleichen Familien" mehr vorhanden sind, kann der Term nicht weiter vereinfacht werden.**

### *1.5.2 Multiplikation und Division*

Bei der Multiplikation und Division ist nicht auf gleiche Familien zu achten. Alle beteiligten Variablen werden zusammengefasst (allenfalls in Potenz geschrieben).

$a \cdot b \cdot c \cdot d = abcd$
$a \cdot b \cdot c \cdot a = aabc = a^2bc$

Die Koeffizienten der beteiligten Faktoren werden dabei miteinander multipliziert/dividiert:

$7a \cdot 4b = 7 \cdot 4 \cdot a \cdot b =$ **28ab**
$21ab : (7b) = 21ab : (7 \cdot b) = 21 \cdot a \cdot b : 7 : b = 21 : 7 \cdot a \cdot (b : b) = 3 \cdot a \cdot 1 =$ **3a**

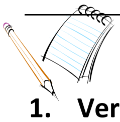
## 1.6 Ordnung im Algebra-Term

Algebraische Terme müssen immer geordnet angegeben werden. Die Regel ist, dass man zuerst auf die Buchstaben schaut und diese alphabetisch ordnet. Am Schluss eines Terms stehen die Zahlterme (also die „buchstabenlosen" Terme)

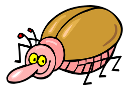
Beispiel: Der Term 12s + 123a – 12 + 23d ist nicht korrekt geordnet. ➔ Richtig wäre die Reihenfolge

123a + 23d + 12s – 12 (also dem Alphabet nach: a – d – s – Zahlterm)

**Die Variablen werden alphabetisch geordnet, die Zahlterme kommen immer am Schluss!)**



# Aufgaben Algebra



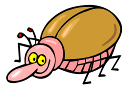
**1. Vervollständige die Tabelle:**

| *allgemeingültige Regel* | **Beispiele mit Zahlwerten** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | **5** | | ***2*** | | ***12*** | |
| $(2x) - 2$ | | **6** | | **4** | | **22** |

**2. Welche allgemeingültige Regel liegt diesen Zahlenbeispielen zu Grunde?**

| *allgemeingültige Regel* | **Beispiele mit Zahlwerten** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | **5** | 7 | ***4*** | *5* | ***152*** | *21* |
| | 4 | **6** | 3 | **4** | 151 | **20** |

**3. Setze für x die entsprechende Zahl in den gegebenen Term ein und rechne aus.**



*Bsp:* *x=2* *3x =* ***3 • 2 = 6***

a) $x=12$ $3x=$ ..............................

b) $x=13$ $4x=$ ..............................

**4. Setze für x die entsprechende Zahl in den gegebenen Term ein und rechne aus.**

*Bsp:* *x=2* *3x+15=* ***3 • 2 + 15 = 6 + 15 = 21***

a) $x=12$ $2x - 18 =$ ..............................

b) $x=3$ $6x + 15 =$ ..............................

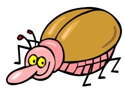
c) $x=9$ $(3x) : 3 =$ ..............................

d) $x=3$ $3x + 15 : 5 =$ ..............................

e) $x=4$ $( 3x + 15 ) : 3 =$ ..............................

f) $x=2$ $3x + 4x - 12 =$ ..............................

**5. Notiere den entsprechenden Term, wenn die Variablen a und b für beliebige Zahlen stehen:**



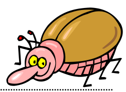
*Bsp:* *Das Produkt des Doppelten von a und b* ***2a • b = 2ab***

a) Die Summe des Dreifachen von a und dem Vierfachen von b ..............................

b) Das Fünffache der Summe der beiden Zahlen ..............................

c) Der Quotient aus dem Vierfachen von b und dem Doppelten von a. ..............................

**6. Vereinfache die Terme so weit wie möglich. Gib die Lösung geordnet an.**



a) $23x - 12x - 2x =$ ..............................

b) $123y - 3x + 15y=$ ..............................

c) $54y - 34y + 23x =$ ..............................

d) $43m + 34mn - 3mn =$ ..............................

e) $152a - 135b - 15a =$ ..............................

f) $90e - 89d - 5e + 90d =$ ..............................

# 2. Teiler, Vielfache und Primzahlen

## 2.1 Vielfache und Teiler

Für viele Aufgaben ist es von grosse Wichtigkeit, zu wissen ob eine Zahl teilbar ist und – wenn ja – durch welche Zahl(en). Zuerst gelten folgende Begriffsdefinitionen:

> Eine natürliche Zahl n ist durch eine natürliche Zahl m teilbar, wenn der Quotient n:m wieder eine natürliche Zahl ist (die Division also restlos aufgeht).
>
> **m** heisst dann **Teiler von n**.
> **n** heisst dann **Vielfaches von m**.

Beispiele:

→18 ist ein Vielfaches von 3 (weil 3•6 = 18 → 18 ist Ergebnis einer Multiplikation mit 3 als Faktor)
→ 9 ist ein Teiler von 18; weil 18:9 = 2 (Division geht auf).
→ 8 ist ein Vielfaches von 2 und 2 ist ein Teiler von 8 (weil 2 • 4 = 8 und 8 : 2 = 4)

## 2.2 Die gebräuchlichsten Teilbarkeitsregeln

Zusatzinformation
(an dieser Stelle im Lehrmittel nicht vorhanden)

**Endzifferregeln:**

Eine ganze Zahl ist teilbar durch

*Wohin schauen?*

| | | |
|---|---|---|
| w x y z | 2 | wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist |
| w x y z | 4 | wenn die von den letzten zwei Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.. |
| w x y z | 8 | wenn die von den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist. |
| w x y z | 5 | wenn die letzte Ziffer eine 5 oder eine 0 ist |
| w x y z | 10 | wenn die letzte Ziffer eine 0 ist. |

**Quersummenregeln:**

Eine ganze Zahl ist teilbar durch

| | | |
|---|---|---|
| w x y z → w + x + y + z | 3 | wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist |
| w x y z → w + x + y + z | 9 | wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist |
| w x y z → z – y + x - w | 11 | wenn ihre alternierende Quersumme (von rechts, - +) durch 11 teilbar ist. |

Bemerkungen:

**Eine Zahl ist teilbar durch 6, wenn sie sowohl durch 2, als auch durch 3 teilbar ist.**
**Teilbar durch 12: Die Zahl ist teilbar durch 3 und durch 4.**
**Die Regel für die Teilbarkeit durch 7 muss nicht gelernt werden.**

## 2.3 Die Teiler einer Zahl bestimmen

Um die Teiler einer Zahl zu bestimmen, können wir zwei verschiedene Methoden anwenden:

*a) Methode der komplementären Teiler*

Wir suchen die Teiler von 120. Wir überlegen uns, wie 120 als Produkt von zwei Zahlen gebildet werden kann und gehen systematisch vor.

➔ 1 ● 120 = 120 (somit sind 1 und 120 komplementäre Teiler)
➔ 2 ● 60 = 120 (also sind auch 2 und 60 komplementäre Teiler)
➔ usw.

Wir prüfen immer grössere Zahlen, bis wir auf „Pärchen" treffen, die wir schon gefunden haben…

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 120 | |
| 2 | 60 | |
| 3 | 40 | |
| 4 | 30 | |
| 5 | 24 | |
| 6 | 20 | |
| ~~7~~ | | geht nicht |
| 8 | 15 | |
| ~~9~~ | | geht nicht |
| 10 | 12 | |
| ~~11~~ | | geht nicht |

**Teiler von 120 sind also 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120**

Wichtig: Jede Zahl hat mindestens 2 Teiler, nämlich 1 und sich selber.

Begriffe:

**Primzahlen:**
Zahlen, welche genau 2 Teiler haben (also **nur durch 1 und sich selber teilbar sind**) heissen **Primzahlen** (Eins ist keine Primzahl, da sie nur einen Teiler hat. Die einzige gerade Primzahl ist 2)

**Zusammengesetzte Zahlen:**
Zahlen, welche **mehr als 2 Teiler** haben, heissen **zusammengesetzte Zahlen**.

**Quadratzahlen:**
Zahlen, welche eine **ungerade Anzahl Teiler** haben, sind **Quadratzahlen**.

*b) Die Primfaktoren-Zerlegung*

Idee: **Jede zusammengesetzte Zahl kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden**

**Verfahren:**

Dabei wird immer mit der kleinstmöglichen Primzahl (ohne 1) begonnen. Man zerlegt also in die möglichen Teiler 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. Jede einzelne Primzahl schreibt man dann in die „zerlegte" Reihe von Faktoren

$120 = 2 \bullet 60$
$60 = 2 \bullet 30$
$30 = 2 \bullet 15$
$15 = 3 \bullet 5$

$120 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 5 = 2^3 \bullet 3 \bullet 5$

## 2.4 Arme und reiche Zahlen

In der Mathematik wird auch der Begriff von „armen", „reichen" und „vollkommenen Zahlen" verwendet. Die Unterscheidung dieser Zahlen erfolgt auf Grund der Summe ihrer Teiler (ohne den grössten Teiler, also die Zahl selber).

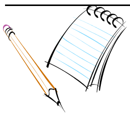
Übersicht der Unterteilung:

| Zahl n: | Die Teiler der Zahl: (die Zahl selber in Klammern) | Summe s der Teiler: (ohne die Zahl selber) | Vergleich von Teilersumme und der Zahl selber | Einteilung der Zahl |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 1, 3, 5, (15) | 1+3+5 = 9 | Teilersumme < Zahl (s<n oder 9<15) | **Arme Zahl** |
| 18 | 1, 2, 3, 6, 9, (18) | 1+2+3+6+9 = 21 | Teilersumme > Zahl (s>n oder 21 > 18) | **Reiche Zahl** |
| 12 | 1, 2, 3, 4, 6, (12) | 1+2+3+4+6 = 16 | Teilersumme > Zahl (s>n oder 16 > 12) | **Reiche Zahl** |
| 4 | 1, 2, (4) | 1+2 = 3 | Teilersumme < Zahl (s<n oder 3<4) | **Arme Zahl** |
| 6 | 1,2,3,(6) | 1+2+3 = 6 | Teilersumme = Zahl (s=n oder 6=6) | **Vollkommene Zahl** |

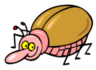
**Arme Zahl**: Die Summe s der Teiler der Zahl n (ohne n) ist **KLEINER als** die Zahl selber ➔ $s < n$

**Reiche Zahl**: Die Summe s der Teiler der Zahl n (ohne n) ist **GRÖSSER als** die Zahl selber ➔ $s > n$

**Vollkommene Zahl**: Die Summe s der Teiler der Zahl n ist **GLEICH GROSS** wie die Zahl selber ➔ $s = n$

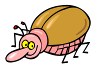


## Aufgaben „Teiler und Primfaktorzerlegung“



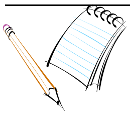
**1. Bestimme die Teiler der folgenden Zahlen:**

| | *Zahl:* | *Teiler* |
|---|---|---|
| a) | 126 | ………………………… |
| b) | 84 | ………………………… |
| c) | 38 | ………………………… |
| d) | 52 | ………………………… |
| e) | 168 | ………………………… |

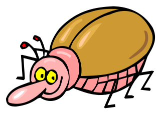


**2. Zerlege die folgenden Zahlen in ihre Primfaktoren:**

| | Zahl: | Primfaktorzerlegung: |
|---|---|---|
| a) | 38 | ………………………… |
| b) | 42 | ………………………… |
| c) | 164 | ………………………… |
| d) | 135 | ………………………… |
| e) | 64 | ………………………… |
| f) | 44 | ………………………… |
| g) | 15 | ………………………… |



## Aufgaben „Teilbarkeit“



**3. Bestimme, durch welche Zahlen die angegebene Zahl teilbar ist.**

| Zahl | Überprüfungsart / Notizen: | Teilbar durch | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 125 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 351 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 282 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 5088 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 352 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 71516 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 38580 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 95623 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 5124 | | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Nur mit Zusatzinfos lösbar
(Diese Aufgabentypen sind nicht Teil des Lehrmittels „Mathematik 1“)

…………………………………………………………

…………………………………………………………

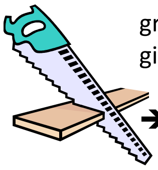
…………………………………………………………

…………………………………………………………

## 2.5 Der grösste gemeinsame Teiler (ggT)

Es ist natürlich wenig interessant, alle Teiler von verschiedenen Zahlen zu betrachten. Sobald man nämlich innerhalb von zwei Zahlen nach einem gemeinsamen Teiler sucht, interessiert meist der Grösste. Und das ggT-Problem taucht oft auf:

### Ein Beispiel, das dir helfen soll, das „ggT-Problem“ (die Ausgangslage) zu verstehen:



Du hast zwei verschieden lange Holzstäbe (z.B. 108 und 144 cm lang). Du möchtest daraus aber lauter gleich grosse Stücklein herstellen, damit du z.B. einen kleinen Zaun bauen kannst, der deinen Kräutergarten vor gierigen Schnecken schützt.

→ *Du suchst also die Zahl, welche die grösstmögliche Zaunhöhe bringt. Oder anders gesagt: Eine Zahl, durch die du 108 und 144 teilen kannst und die möglichst gross ist*.

**Idee:** Die gesuchte Zahl ist ganz offensichtlich Teiler von 108 und von 144. Zudem ist sie der grösste dieser Teiler (also: grösster gemeinsamer Teiler = ggT)

**Wir suchen also in den Teilern dieser beiden Zahlen:**

**Teiler von 108: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108**
**Teiler von 144: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 24, 36, 48, 72, 144**

Als Hilfsmittel markieren wir alle gemeinsamen Teiler mit Farbe:

Teiler von 108: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108
Teiler von 144: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 24, 36, 48, 72, 144

Wir suchen also in den gemeinsamen Teilern von 108 und 144:
**Speziell brauchen wir den grössten Teiler (hier also die Zahl 36)**

**Lösung:** Du machst also jeweils 36cm lange Holzstäbe. (→ Du wirst merken, dass du aus den 108cm langen Stäben jeweils 3 solche Stäbe schneiden kannst (3•36 = 108) und aus den 144cm langen Stäben wirst du jeweils 4 solche Stäbe herstellen können (4•36 = 144).

### Wie bestimme ich den ggT?

Damit du nicht jedes Mal die Teiler nach den geeigneten Zahlen durchsuchen musst, gibt es eine einfache, wirkungsvolle und sichere Methode, wie man den ggT von zwei (oder mehreren) Zahlen herausfindet:

*ggT- Bestimmung durch Primfaktorzerlegung*

Die Idee ist einfach: Du zerlegst jede der beteiligten Zahlen in ihre Primfaktoren. Die gemeinsamen Primfaktoren schreibst du dir raus und bestimmst ihr Produkt. Schon hast du den ggT herausgefunden.

Gesucht ist also der ggT von 108 und 144. Das Vorgehen sieht damit so aus:

diese Angabe schreiben wir immer dazu!

ggT (108, 144)

108 = 2 • 2 • 3 • 3 • 3
144 = 2 • 2 • 2 • 2 • 3 • 3

**ggT = 2 • 2 • 3 • 3 = 36**

**Vorgehen:**
a) Primfaktorzerlegung für die beteiligten Zahlen
b) gemeinsame Primfaktoren herausschreiben → **ggT**

## Aufgaben „ggT – Der grösste gemeinsame Teiler“

**1. Löse die folgende Satzaufgabe:**

Du feierst mal wieder Geburtstag. Deine Mutter hat dazu zwei Kuchen gebacken, die leider unterschiedlich lang wurden (aber gleich hoch und gleich breit sind). Einer ist 35cm, der andere 60 cm lang. Natürlich möchtest du jedem deiner Mitschüler ein gleich grosses Stück Kuchen abschneiden (und natürlich auch nichts übrig lassen). Wie dick werden die Kuchenstücke, wenn sie möglichst dick sein sollen?

**2. Löse die folgenden Aufgaben:**

a) ggT (84, 126)

b) ggT (21, 84)

c) ggT (268, 737)

d) ggT (26, 156)

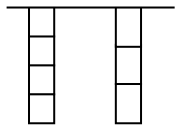
e) ggT (121, 165)

## 2.6 Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Auch das Problem des kleinsten gemeinsamen Vielfachen taucht oft auf, denn manchmal interessieren wir uns ja nicht für Teiler, sondern eben für Vielfache von Zahlen.

**Ein Beispiel, das dir helfen soll, das „kgV-Problem“ (die Ausgangslage) zu verstehen:**

Du bist stolzer Besitzer von zwei Arten von Bauklötzen. Die einen sind schön rund und haben, wenn du sie aufstellst, eine Höhe von 32cm. Die anderen sind eckig und – ebenfalls aufgestellt – eine Höhe von 48 cm. Nun möchtest du diese Bauklötze so aufeinander stellen, dass du darüber eine horizontale Latte legen kannst. Mit anderen Worten: Du baust ein Tor, dessen erster Pfosten aus den runden und dessen zweiter Pfosten aus den eckigen Bauklötzen besteht. Nun fragt sich natürlich, wie hoch dieses Tor mindestens wird.



➔ *Du suchst also die Zahl, welche die kleinstmögliche Torhöhe bringt. Oder anders gesagt: Eine Zahl, die ein Vielfaches von 32 und von 48 und die möglichst klein ist.*

**Idee:** Die gesuchte Zahl ist ganz offensichtlich Vielfaches von 32 und 48. Zudem ist sie der kleinste dieser Vielfachen (also: kleinstes gemeinsames Vielfaches = kgV)

**Wir suchen also unter den Vielfachen dieser beiden Zahlen:**

**Vielfache von 32 = 32, 64, 96, 128, 160, 192, …**
**Vielfache von 48 = 48, 96, 144, 192, …**

Als Hilfsmittel markieren wir alle gemeinsamen Vielfachen mit Farbe:

Vielfache von 32 = 32, 64, 96, 128, 160, 192, 224, 256, 288, 320, ...
Vielfache von 48 = 48, 96, 144, 192,240, 288, 332, …

> Wir suchen also in den gemeinsamen Vielfachen von 32 und 48.
> **Speziell suchen wir das kleinste gemeinsame Vielfache (in diesem Fall 96)**

**Lösung:** Der eine Torpfosten umfasst also 3 Elemente à je 32 cm (weil 3•32 = 96 oder 96 : 32 = 3) und der zweite Torpfosten ist 2 Elemente à 48cm hoch (weil 2 •48 = 96 oder 96 : 48 = 2).

### Wie bestimme ich das kgV?

Natürlich gibt es auch für die Bestimmung des kgV eine einfachere, schnellere und sichere Methode.

*kgV- Bestimmung durch Primfaktorzerlegung*

Auch hier brauchen wir die Primfaktorzerlegung. Von der kleinsten Zahl müssen wir alle, von den grösseren Zahlen die zusätzlichen Primfaktoren herausschreiben und schon haben wir das kgV.

Gesucht ist das kgV, wir wollen also wissen, welches die erste Zahl ist, die sowohl in der 32er, als auch in der 48er Reihe auftaucht.

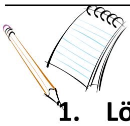
diese Angabe schreiben wir immer dazu!

kgV (32, 48)

32 = 2 • 2 • 2 • 2 • 2
48= 2 • 2 • 2 • 2 • 3

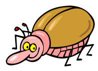
**kgV = 2 • 2 • 2 • 2 • 2 • 3 = 96**

> **Vorgehen:**
> a) Primfaktorzerlegung für die beteiligten Zahlen
> b) Multipliziere jetzt **alle Primfaktoren der kleineren Zahl** mit den **zusätzlichen Primfaktoren der grösseren Zahl**



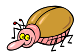
## Aufgaben „kgV – Das kleinste gemeinsame Vielfache“

**1. Löse die folgende Satzaufgabe:**



Du bist unterwegs auf einem riesigen Monument. Auf dieses führen zwei Treppen, eine hat 15 cm hohe Stufen, die andere hat 18cm hohe Stufen. Nun überlegst du, nach wie vielen Stufen du zum ersten Mal wieder auf gleicher Höhe stehst. Finde also heraus, nach wie viele Stufen du bei beiden Treppen wieder gleich hoch stehst.

**2. Löse die folgenden Aufgaben:**



a) kgV (84, 126)

b) kgV (21, 15)

c) kgV (134, 737)

d) kgV (52, 156)

e) kgV (121, 130)

## 2.7 Der Zusammenhang zwischen ggT und kgV:

Natürlich hängen der ggT und das kgV auch mit den Zahlen zusammen, von denen man ausgeht.

*Wir betrachten zum Beispiel die Zahlen 24 und 36*

ggT (24, 36):
24 = 2 • 2 • 2 • 3
36 = 2 • 2 • 3 • 3
ggT = 2 • 2 • 3 = **12**

kgV (24, 36)
24 = 2 • 2 • 2 • 3
36 = 2 • 2 • 3 • 3
kgV = 2 • 2 • 2 • 3 • 3 = **72**

| **24 •** | **36 =** | **12 •** | **72** |
|---|---|---|---|
| Zahl 1 | Zahl 2 | ggT | kgV |

Das Produkt der beiden Zahlen entspricht also dem Produkt des ggT und des kgV der beiden Zahlen.

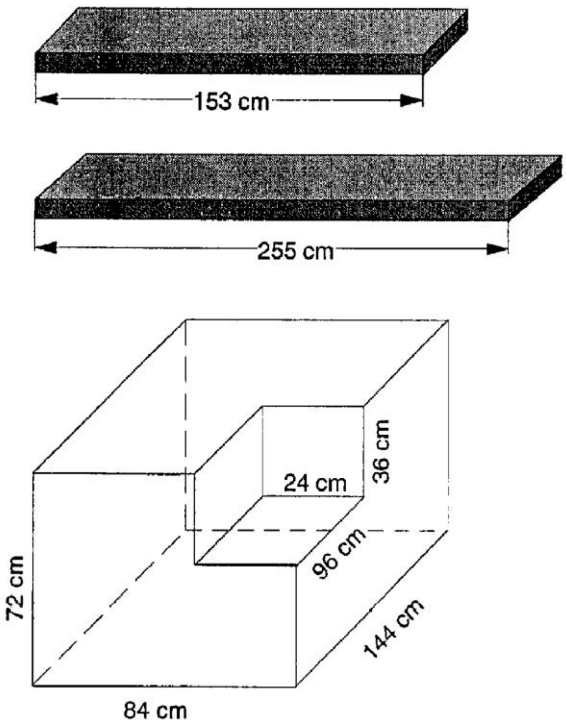
> **Allgemeine Regel:**
>
> **a • b = ggT (a,b) • kgV (a,b)**

## 2.8 Wann verwendest du den ggT, wann brauchst du das kgV?

Sobald du einmal begriffen hast, wann du welche dieser beiden „Formen" anwenden musst, ist es ein Leichtes, die vielen Aufgaben dazu richtig anzugehen.

### ggT

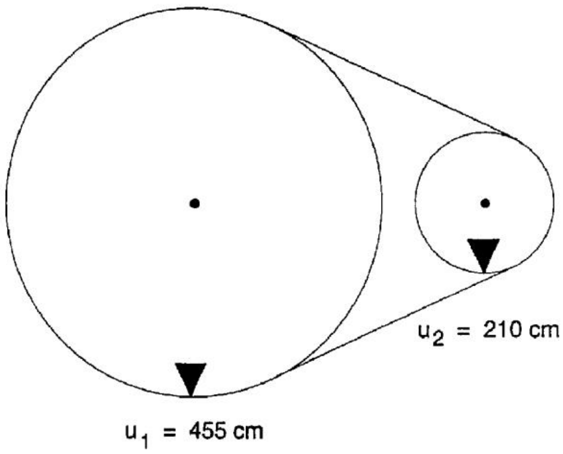
Zerlegen von Dingen in lauter **gleiche, möglichst grosse Teile:**




Vollständiges Kürzen von Brüchen

### kgV

Wiedererreichen eines Ausgangszustandes bei regelmässigen (periodischen) Abläufen oder Mustern:




Bestimmen des Hauptnenners (HN) von Brüchen:

1. Gleichnamigmachen:

$$\frac{a+b}{18a}, \quad \frac{c+d}{27c}$$

2. Gleichungen mit Bruchtermen lösen

## Aufgaben „ggT und kgV – Gemischte Aufgaben“

**1. Entscheide, ob bei den unten geschilderten Problemen das kgV oder der ggT zum Einsatz kommen:**

| | | *ggT* | *kgV* | *Grund:* |
|---|---|---|---|---|
| *Bsp:* | *Zersägen von verschieden grossen Brettern in gleich grosse Stücke.* | ☒ | ☐ | ***Zerlegen in gleich grosse Stücke = ggT*** |
| | | | | |
| a) | Rasenfläche mit quadratischen Platten belegen. Wie gross kann diese quadratische Platte maximal sein. | ☐ | ☐ | |
| b) | Lampen blinken in verschiedenem Abstand. Wann blinken sie gleichzeitig? | ☐ | ☐ | |
| c) | Zwei verschieden grosse Räder drehen sich. Wann sind sie das erste Mal wieder in der Ausgangsposition? | ☐ | ☐ | |
| d) | Ein Quader mit verschiedener Kantenlänge soll mit Würfelchen ausgefüllt werden. Maximale Länge der Würfelkante? | ☐ | ☐ | |
| e) | Verschiedene Treppen mit unterschiedlicher Stufenhöhe. Wann ist man das erste Mal wieder auf gleicher Höhe? | ☐ | ☐ | |
| f) | Rund um ein Schwimmbad soll ein Weg aus quadratischen Platten gelegt werden. Wie gross dürfen die maximal sein? | ☐ | ☐ | |
| g) | Ein rechteckiges Rasenfeld soll mit möglichst wenigen Schnitten von einem Rasenmäher gemäht werden. Wie breit kann dieser Rasenmäher höchstens sein? | ☐ | ☐ | |

In dieser Form im Lehrmittel nicht verlangt

(Diese Aufgabentypen sind weiterführend als im Lehrmittel „Mathematik 1“)

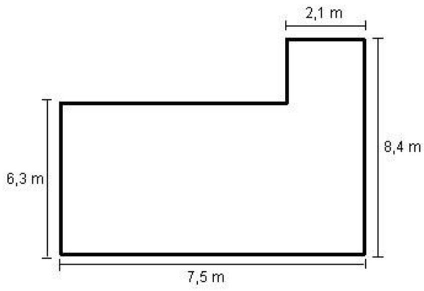
**2. Löse die folgenden Aufgaben:**

a) Am Bahnhof Rapperswil fahren Züge alle 30 min nach Zürich, alle 42 min nach St. Gallen sowie alle 24 min ein Bus nach Wattwil. Um 12.00 Uhr fahren alle drei Verkehrsmittel gemeinsam ab; Wie lange dauert es, bis sie zum nächsten Mal gleichzeitig fahren?

b) Drei Sportler rennen auf einer kreisförmigen Rennbahn. Zur Bewältigung einer Runde benötigt der Schnellste 32 s, der Mittelschnelle 40 s und der Langsamste 48 s. Alle Läufer starten auf einer Linie; wie lange wird es dauern, bis alle wieder auf einer Linie sind? Gib das Ergebnis in Minuten an.

c) Drei Dachlatten von 1,8 m, 2,52 m und 1,44 m Länge sollen in gleich lange Stücke zersägt werden. Wie lang kann ein Stück höchstens werden und wie viele solcher Stücke erhält man?

d) Der Boden der Garderobe soll mit möglichst wenigen, lauter gleich grossen quadratischen Platten belegt werden, wobei Du eine Lösung suchen sollst, bei der keine Platte zerschnitten werden muss?




e) 450 ist das kgV. dreier Zahlen, die durch 15 und 25 teilbar sind. Alle sind kleiner als 450. Wie heissen die drei Zahlen?

f) Christian beobachtet drei tropfende Wasserhahnen. Beim ersten löst sich alle 8 Sekunden ein Tropfen ab, beim zweiten alle 12 Sekunden und beim dritten alle 14 Sekunden. Nun lösen sich alle drei Tropfen gleichzeitig. Wie lange dauert es von jetzt an, bis sich zum nächsten Mal alle drei Tropfen gleichzeitig lösen? (Angabe in Sekunden)