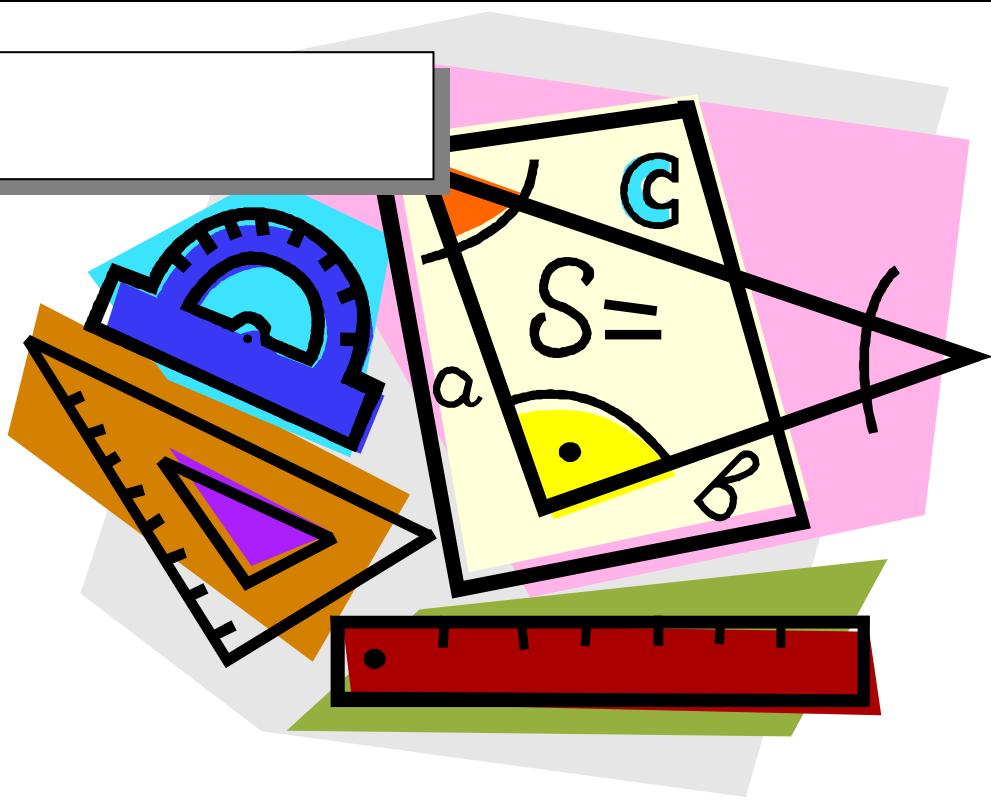


# Geometrie-Dossier

## Kreis 2

Name:

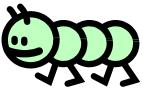


Inhalt:

- Konstruktion im Kreis (mit Tangenten, Sekanten, Passanten und Sehnen)
- Grundaufgaben

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  gekennzeichnet

schwierigere Aufgaben sind mit einem  gekennzeichnet.

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbstständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten:

Konstruktionen:

Skizzen:

Sichtbarkeit:

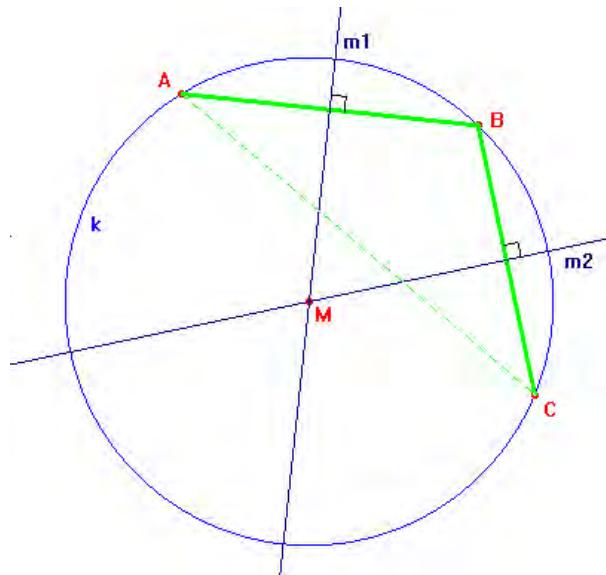
Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)

Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.

In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.

## 1. Kreiseigenschaften

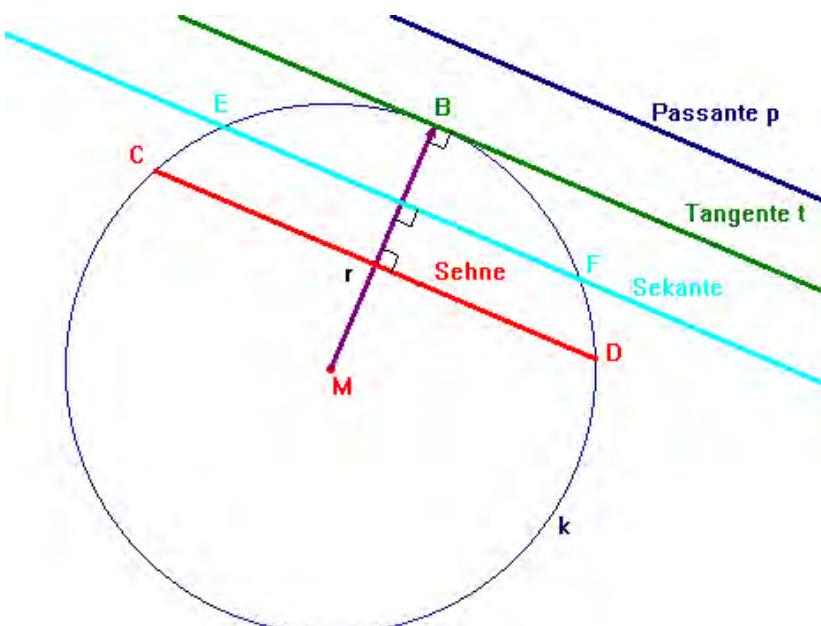
Über die Eigenschaften des Kreises haben wir schon bei den Punktmengen und im Thema Kreis 1 gesprochen. Eine spezielle Eigenschaft spielt aber für die Konstruktion mit Kreisen eine wichtige Rolle. Es geht dabei um die ausgezeichnete Situation des Mittelpunktes eines Kreises.



- Ein Kreis ist durch 3 Punkte eindeutig bestimmt.
- Der Kreismittelpunkt liegt dabei auf dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von je zwei Punkten. (→ Siehe Umkreis eines Dreiecks)
- Hier ist der Kreismittelpunkt als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten  $m_1$  (Mittelsenkrechte von AB) und der Mittelsenkrechten  $m_2$  (Mittelsenkrechte von BC) konstruiert worden. Er entspricht dem Umkreise des Dreiecks ABC.

## 2. Gegenseitige Lage von Kreis und Geraden.

Ein Kreis und eine Gerade können in verschiedener Art in der Ebene liegen. Die Gerade kann den Kreis schneiden, ihn berühren oder neben dem Kreis verlaufen. Je nach ihrer Lage wird sie daher unterschiedlich bezeichnet. Untenstehend findet sich eine Übersicht über die verschiedene Bezeichnung einer Geraden bezüglich eines Kreises:



Die **Passante p** passiert den Kreis, sie hat also keinen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis (Passante = „Vorbeigehende“)

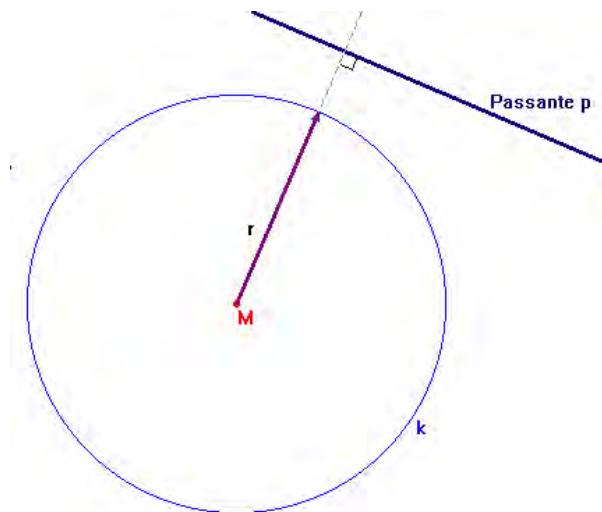
Die **Tangente t** berührt den Kreis im Berührungs punkt B. Sie hat also genau einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis. (Tangente = „Berührende“)

Die **Sekante** schneidet den Kreis in zwei Punkten (hier E und F). Sie hat also genau zwei gemeinsame Punkte mit dem Kreis, nämlich die Schnittpunkte E und F. (Sekante = „Schneidende“)

Die **Sehne** ist eine Strecke, die innerhalb des Kreises verläuft. Sie hat genau zwei Punkte mit dem Kreis gemeinsam, nämlich die Schnittpunkte C und D. Die Sehne ist ein Teil einer Sekante.

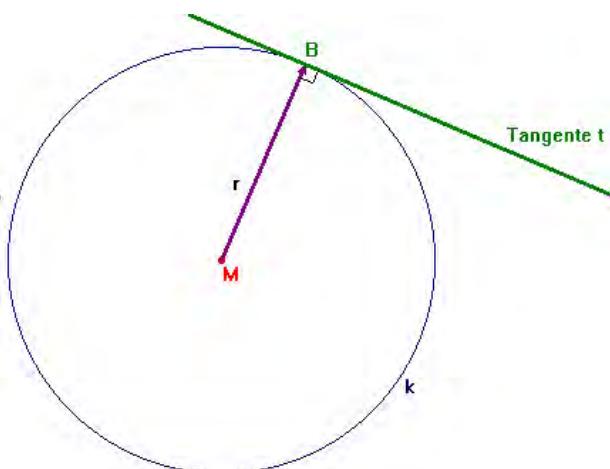
Betrachten wir diese verschiedenen Geraden noch genauer, damit diese typischen Eigenschaften auch klar definiert werden können und wir sie wieder für die Konstruktion nützen können.

## 2.1 Die Passante



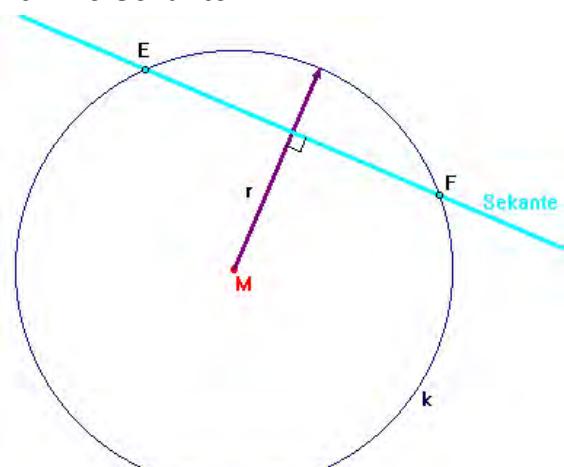
- Passante und Kreis haben keinen gemeinsamen Punkt  $k \cap p = \{\}$
- Der Abstand von Passante zum Kreismittelpunkt ist grösser als der Kreisradius  $r$  ( $Mp > r$ )

## 2.2 Die Tangente



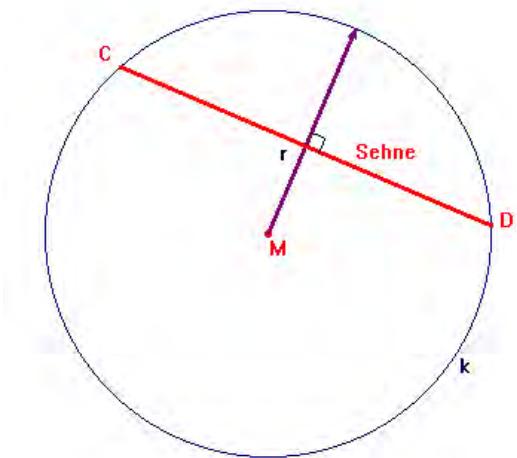
- Die Tangente berührt den Kreis im Berührpunkt B (Tangente und Kreis haben genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Punkt B).
- Der Abstand  $MB$  entspricht gerade dem Kreisradius ( $MB = r$ )
- Die Tangente steht senkrecht auf dem Kreisradius ( $t \perp MB$ )
- Für die Konstruktion von Tangenten stehen uns **zwei Grundkonstruktionen** zur Verfügung (siehe Grundkonstruktionen 1 und 2)

## 2.3 Die Sekante



- Die Sekante schneidet den Kreis in genau zwei Punkten. (Schnittpunkte)
- Die Verbindung zwischen den Schnittpunkten E und F ist eine Sehne.
- Der Abstand der Sekante zum Kreismittelpunkt M ist dabei kleiner als der Kreisradius  $r$  ( $Ms < r$ ).

## 2.4 Die Sehne



- **Zwei Punkte auf dem Kreis bestimmen eine Sehne.** Die Entfernung der beiden Punkte ist dabei höchstens so gross wie der Durchmesser des Kreises ( $AB \leq 2r$ )
- **Sehnen gleicher Länge haben gleichen Abstand von M** (da sie um M gedreht wurden)

## 3. Grundkonstruktionen für die Konstruktion von Tangenten an den Kreis.

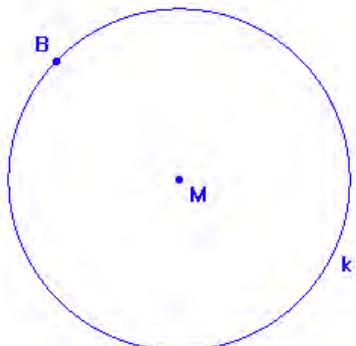
### 3.1 Grundkonstruktion 1:

#### Tangenten durch einen Punkt der Kreislinie.

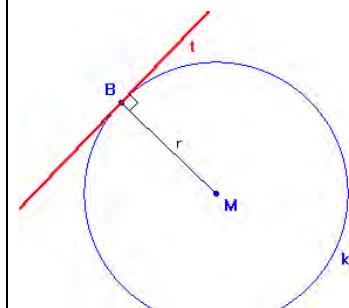
Es handelt sich hier um die einfachste Konstruktion einer Tangente. Wir nützen ganz einfach die Eigenschaft, dass **Tangenten senkrecht auf dem Kreisradius stehen**.

#### Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere die Tangente  $t$ , welche den Kreis  $k$  im Punkt  $B$  berührt.



#### Skizze



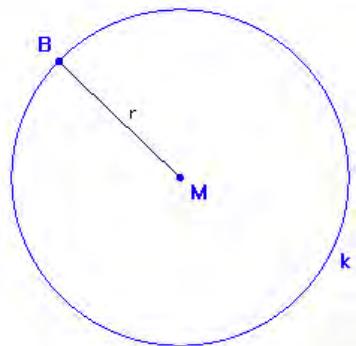
#### KB (Lösungsplan):

1. BM verbinden
2. Lot auf BM durch B  
→ Tangente  $t$ .

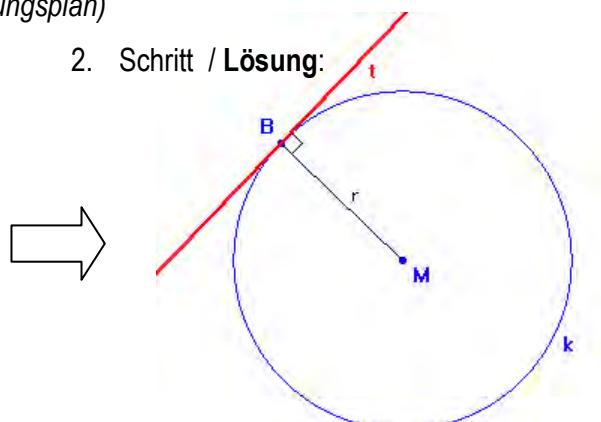
#### Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

1. Schritt:



2. Schritt / Lösung:



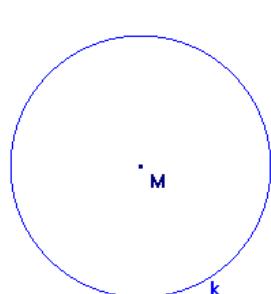
### 3.2 Grundkonstruktion 2:

Tangenten an einen Kreis durch einen Punkt P ausserhalb des Kreises.

Diese zweite Grundkonstruktion ist äusserst wichtig und wird sehr häufig verwendet. Es geht hier darum, die Berührungs punkte der Tangente an den Kreis zu finden. Auch hier verwenden wir die Eigenschaft, dass der **Berührungs punkt der Tangente an den Kreis senkrecht auf dem Radius steht**. So bilden der Punkt P, der Berührungs punkt B und der Kreismittelpunkt M ein rechtwinkliges Dreieck, welches **mittels Thaleskreis über MP konstruiert werden kann** (siehe Skizze).

#### Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere die Tangente  $t$ , welche den Kreis  $k$  berührt und durch den Punkt  $P$  geht.

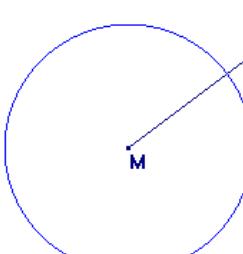


Skizze	KB (Lösungsplan):
<p>Der Berührungs punkt B bildet mit dem Kreismittelpunkt M und dem Punkt P ein rechtwinkliges Dreieck. → Thaleskreis!</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. MP verbinden</li> <li>2. Thaleskreis über MP</li> <li>3. Thaleskreis <math>\cap k</math> → <math>B_1, B_2</math> (Berührungs punkte)</li> <li>4. <math>PB_1</math> und <math>PB_2</math> verbinden (→ Tangenten <math>t_1, t_2</math>)</li> </ol>

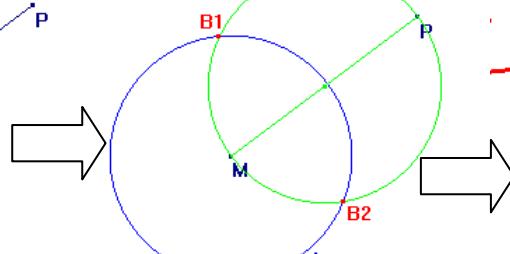
#### Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

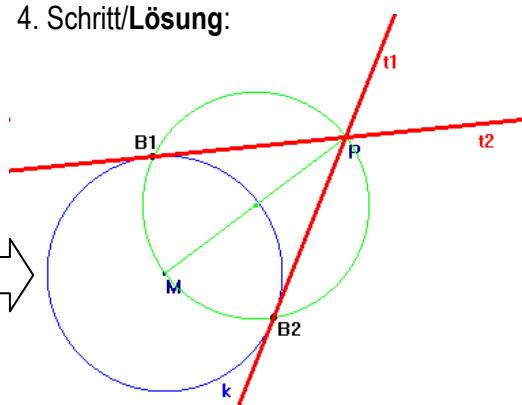
1. Schritt:



2./3. Schritt:



4. Schritt/Lösung:



Zur Erinnerung: Der Thaleskreis über die Strecke MP hat seinen Thaleskreismittelpunkt in der Mitte der Strecke MP. Also muss zuerst MP halbiert werden, damit der Thaleskreis gezeichnet werden kann.

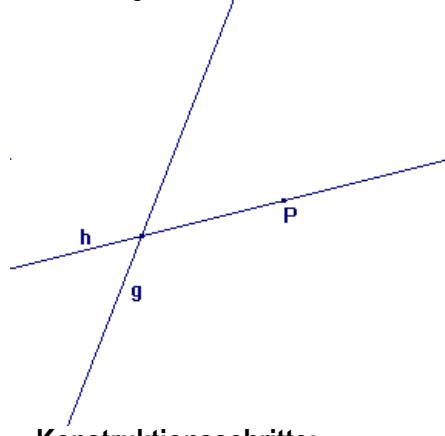
Es ist hier anzumerken, dass die Konstruktion der Berührungs punkte in jedem Fall mittels Thaleskreis zu erfolgen hat. Das „Hinlegen“ des Geo-Dreiecks ist äusserst ungenau und hat mit Geometrie nichts zu tun.

### 3.3 Grundkonstruktion 3:

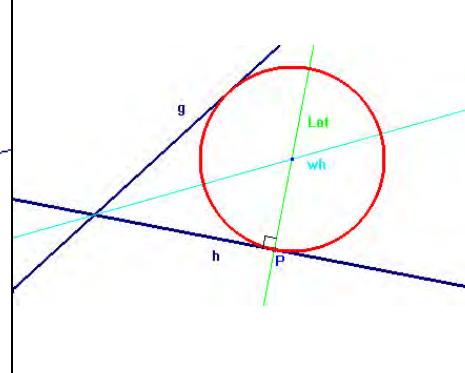
Kreise, welche zwei sich schneidende Geraden berühren, eine davon in einem vorgegebenen Punkt. Die Schwierigkeit der Problemstellung wird immer grösser und wir müssen neben der in den Grundaufgaben 1 und 2 angesprochenen Eigenschaft des Senkrechtstehens von Kreisradius und Tangente noch weitere Eigenschaften verwenden. Der **Kreismittelpunkt eines Kreises, der zwei sich schneidende Geraden berühren muss, hat die Eigenschaft, dass er von den beiden Geraden gleichen Abstand hat** (gleicher Abstand von zwei sich schneidenden Geraden → **Winkelhalbierende**).

#### Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere alle Kreise, die die Gerade  $h$  im Punkt  $P$  und die Gerade  $g$  berühren



#### Skizze



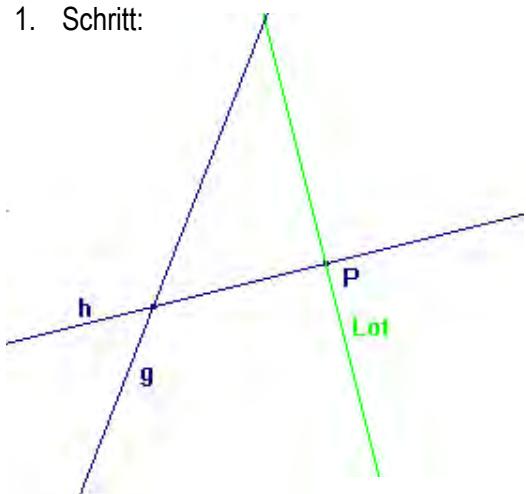
#### KB (Lösungsplan):

1. Lot auf  $h$  durch  $P$   
(Tangente steht senkrecht auf dem Kreisradius)
2. Winkelhalbierende von  $g, h$  zeichnen (Achtung: 2 wh!)  
(Gleicher Abstand von zwei Geraden)
3. Winkelhalbierende  $\cap$  Lot  
→  $M_1, M_2$  (Kreismittelpunkte)
4. Kreise zeichnen (2 Lösungen)  
(Radius =  $MP$ )

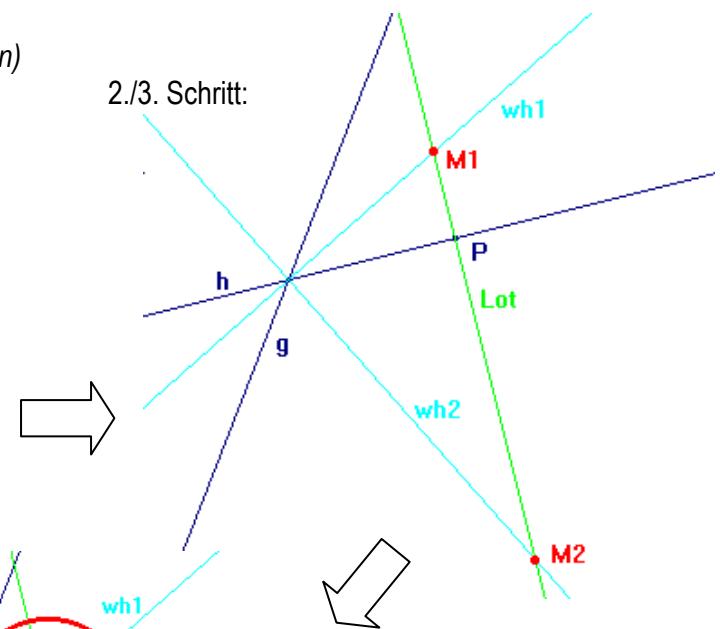
#### Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

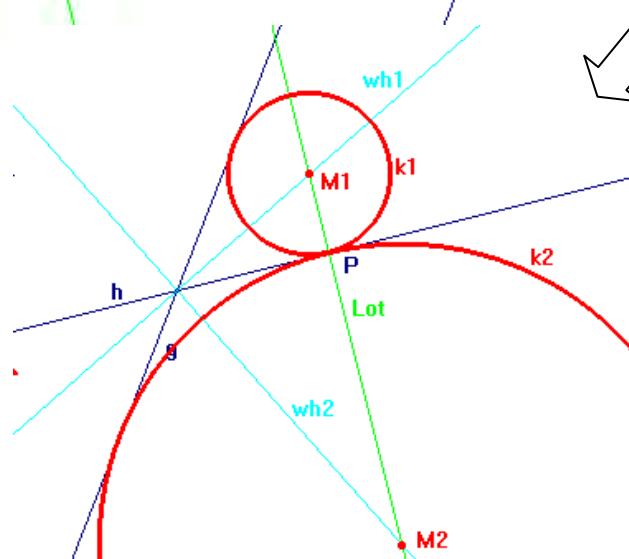
1. Schritt:



2./3. Schritt:



4. Schritt/Lösung:



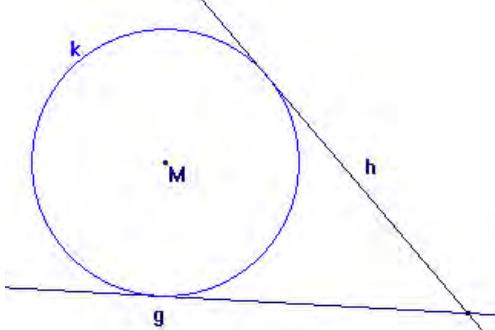
### 3.4 Grundkonstruktion 4:

Kreise, welche zwei sich schneidende Geraden und einen Kreis berühren.

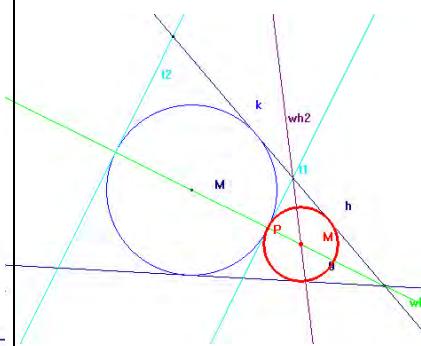
Diese Aufgabe baut auf der Grundaufgabe 3 auf, es kommt einfach noch das Berühren eines Kreises hinzu. Entsprechend brauchen wir auf jeden Fall wieder die Winkelhalbierende und müssen danach die Grundaufgabe 3 gleich nochmals lösen, denn die Tangente an den Kreis bildet mit den gegebenen Geraden wieder zwei sich schneidende Geraden.

Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere einen Kreis, der die Geraden  $g$  und  $h$ , sowie den Kreis  $k$  berührt.



Skizze



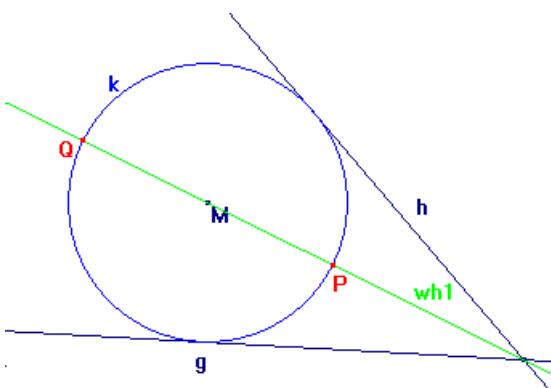
KB (Lösungsplan):

1. Winkelhalbierende von  $g$ ,  $h$  zeichnen (geht durch  $M$ )  
→ ergibt die Schnittpunkte  $P$ ,  $Q$
2. Lot auf Winkelhalbierende durch  $P$ ,  $Q$  (gemeinsame Tangenten der sich berührenden Kreise, stehen senkrecht auf dem Radius)
3. Winkelhalbierende von Lot und  $h$  (bzw.  $g$ ) zeichnen →  $M_1$ ,  $M_2$  (→ vgl. Grundaufgabe 3)
4. Kreise zeichnen (2 Lösungen) (Radius =  $M_1P$  und  $M_2Q$ )

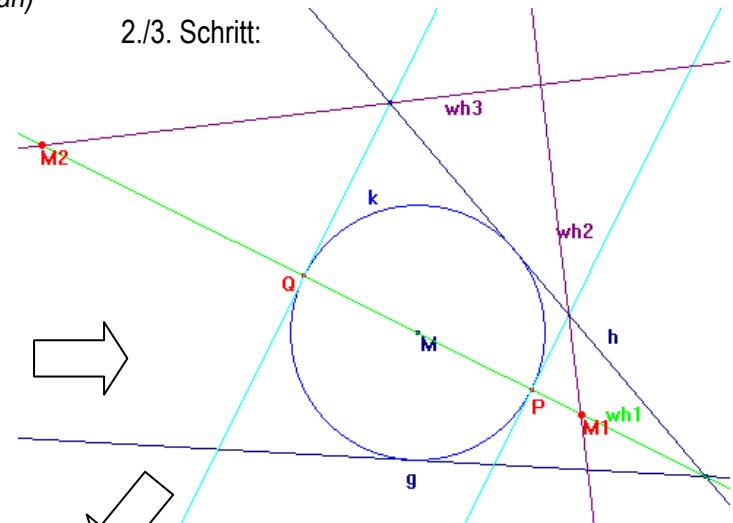
Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

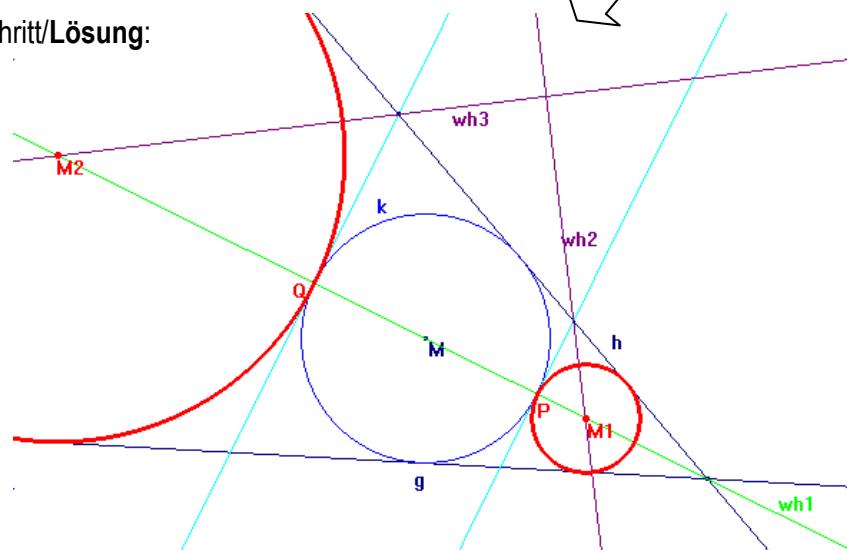
1. Schritt:



2./3. Schritt:



4. Schritt/Lösung:

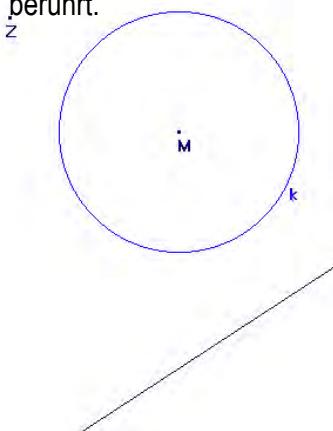


### 3.5 Grundkonstruktion 5:

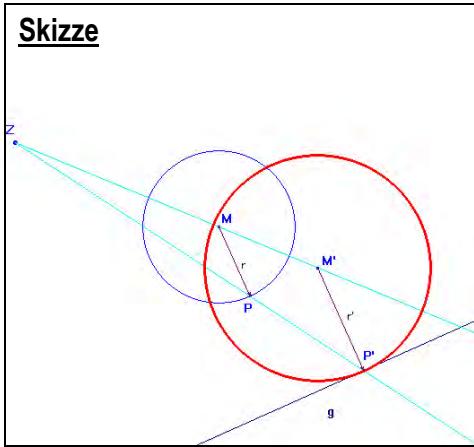
Das zentrisch gestreckte Bild eines Kreises, welcher eine Gerade berührt. Hier müssen wir die Eigenschaften der zentrischen Streckung berücksichtigen. Sie sind im Lösungsplan angegeben.

#### Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere das zentrisch gestreckte Bild des Kreises  $k$ , welches die Gerade  $g$  berührt.



**Skizze**



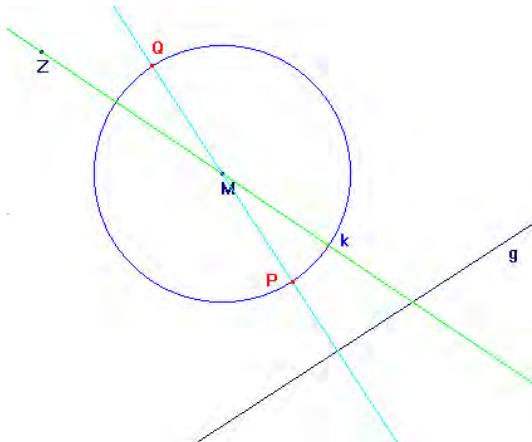
#### KB (Lösungsplan):

1. ZM verbinden (*Bildpunkt liegt auf der Verbindung von Zentrum mit Original*)
2. Lot auf  $g$  durch  $M \cap k \rightarrow P, Q$  ( *$g$  ist Tangente an den gesuchten Kreis, also steht sie senkrecht zum gesuchten Radius*)
3. PZ verbinden und mit  $g$  schneiden  $\rightarrow P'$  (gleiches für  $QZ \rightarrow Q''$  (*Bildpunkt liegt auf Verbindung mit Z*))
4. MP parallel durch  $P'$  verschieben, mit ZM schneiden  $\rightarrow M_1$
5. QM parallel durch  $Q''$  verschieben, mit ZM schneiden  $\rightarrow M_2$
6. Kreise  $k_1$  und  $k_2$  zeichnen (Radius  $P'M_1$  und  $Q''M_2$ )

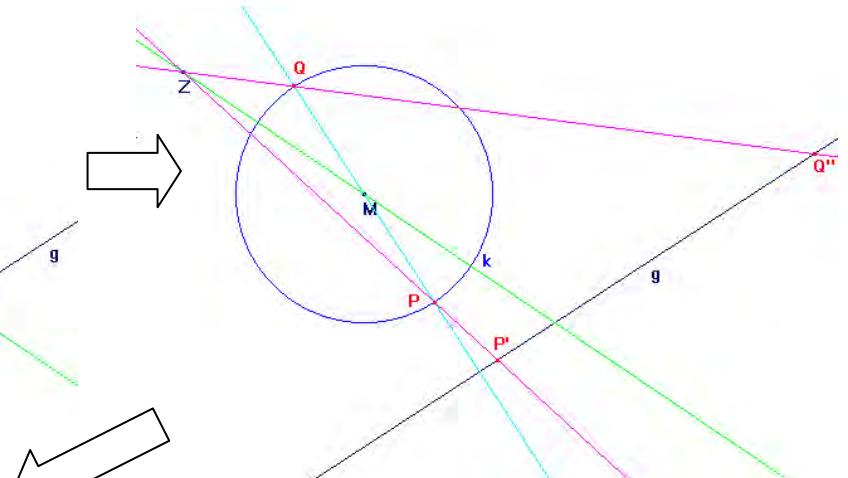
#### Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

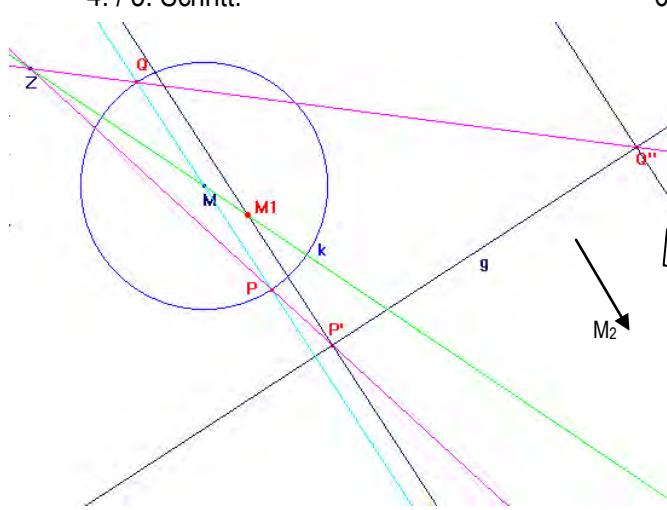
1. / 2. Schritt:



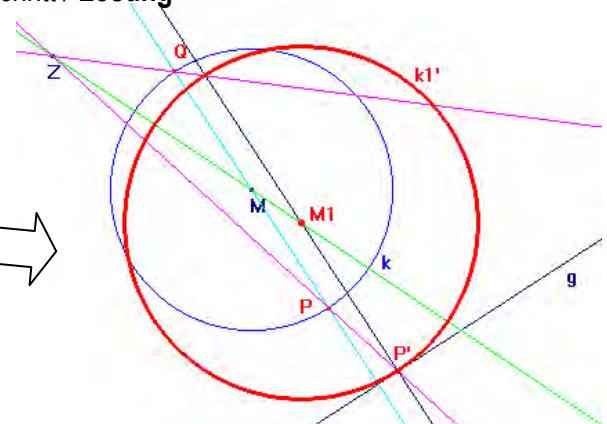
3. Schritt:



4. / 5. Schritt:



6. Schritt / Lösung



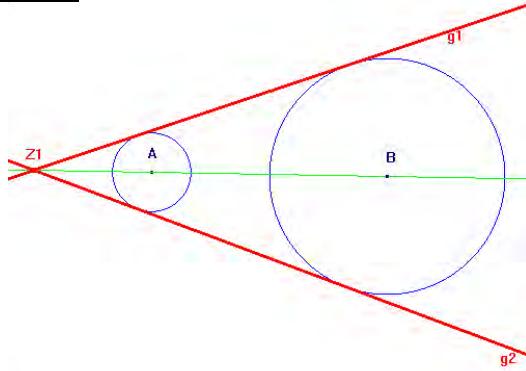
Aus Platzgründen zeichne ich hier nur eine Lösung

## 4. Weitere Standardkonstruktionen mit Tangenten.

### 4.1 Weitere Konstruktion 1:

Gerade, die von zwei Punkten verschiedenen Abstand hat.

#### Skizze



#### KB (Lösungsplan):

1. Kreise um A und B ( $k_1$  (A,  $r=1\text{cm}$ ) und  $k_2$  (B,  $r=3\text{cm}$ ) → *Gerade mit einem Abstand  $r$  zu einem Punkt = Tangente an einen Kreis mit Radius  $r$*
2. *Das Bild gleicht einer zentralen Streckung, also suchen wir Z.* → Punkt P auf  $k_1$  wählen, AP parallel durch B verschieben →  $P'$ .  $PP'$  mit AB schneiden = Z) (Achtung, zwei Lösungen!!) →  $Z_1, Z_2$
3. Tangenten an Kreise durch Z konstruieren (*Thaleskreis!*, *Grundaufgabe 2*)
4. Lösungen einzeichnen (4 Lösungen)

#### Ausgangslage / Aufgabenstellung:

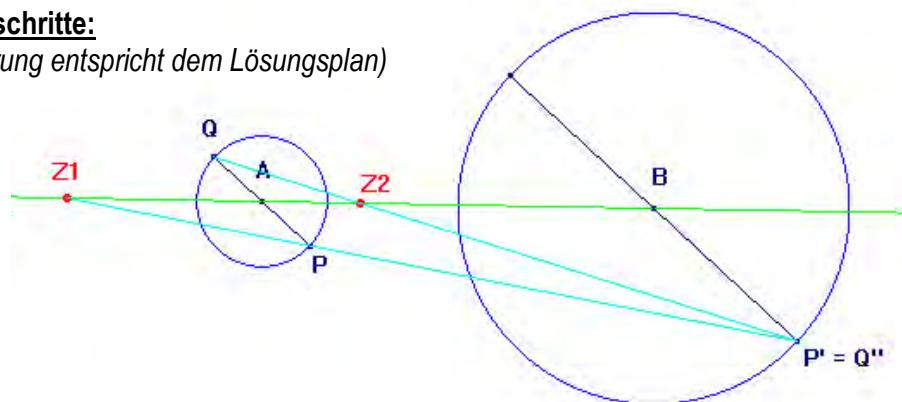
Konstruiere eine Gerade g, die von einem Punkt A 1cm und von einem Punkt B 3cm Abstand hat ( $AB = 6\text{cm}$ ).



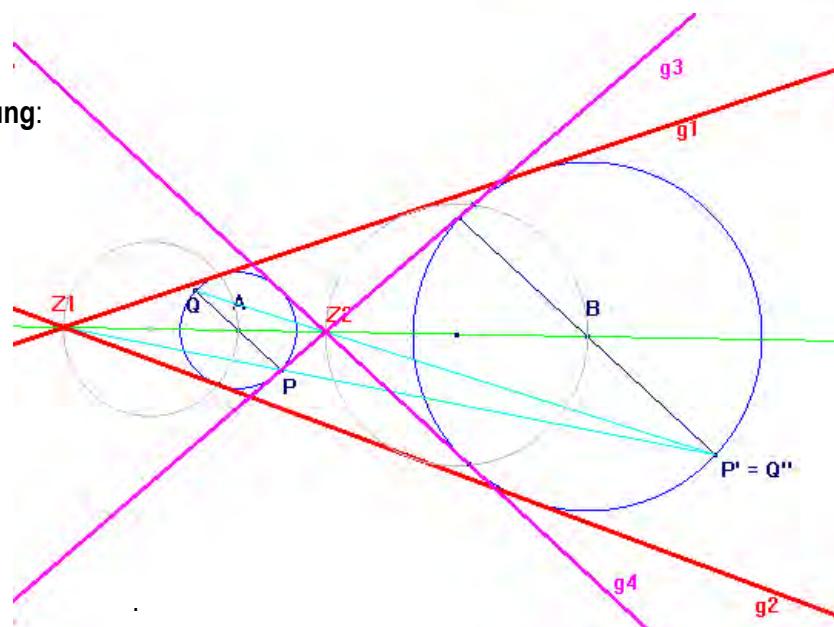
#### Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

1. / 2. Schritt:



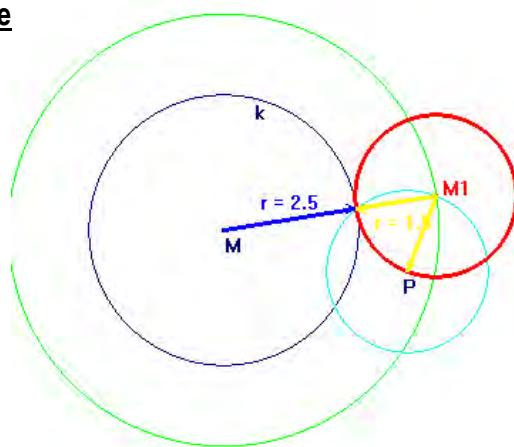
3 / 4. Schritt / Lösung:



## 4.2 Weitere Konstruktion 2:

Kreise, die einen anderen Kreis berühren und durch einen Punkt P gehen.

### Skizze

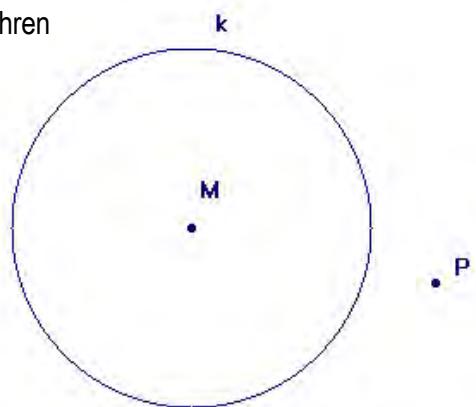


### KB (Lösungsplan):

1. Kreis um den Punkt P ( $r = 1.5\text{cm}$ ) → Der Kreismittelpunkt muss von P 1.5 cm Abstand haben, damit der Kreis durch P geht
2. Den Radius des gegebenen Kreises k um 1.5 cm vergrößern, rsp. verkleinern → Der gesuchte Kreismittelpunkt muss im Abstand des Radius von k entfernt liegen
3. Die Schnittpunkte sind Kreismittelpunkte
4. Lösungen einzeichnen (2 oder 4 Lösungen möglich, je nachdem ob auch der innere Kreis geschnitten wird!!)

### Ausgangslage / Aufgabenstellung:

Konstruiere alle Kreise mit 1.5 cm Radius, die k berühren und durch P gehen ( $PM = 3.5\text{cm}$ ,  $r = 2.5\text{cm}$ ).

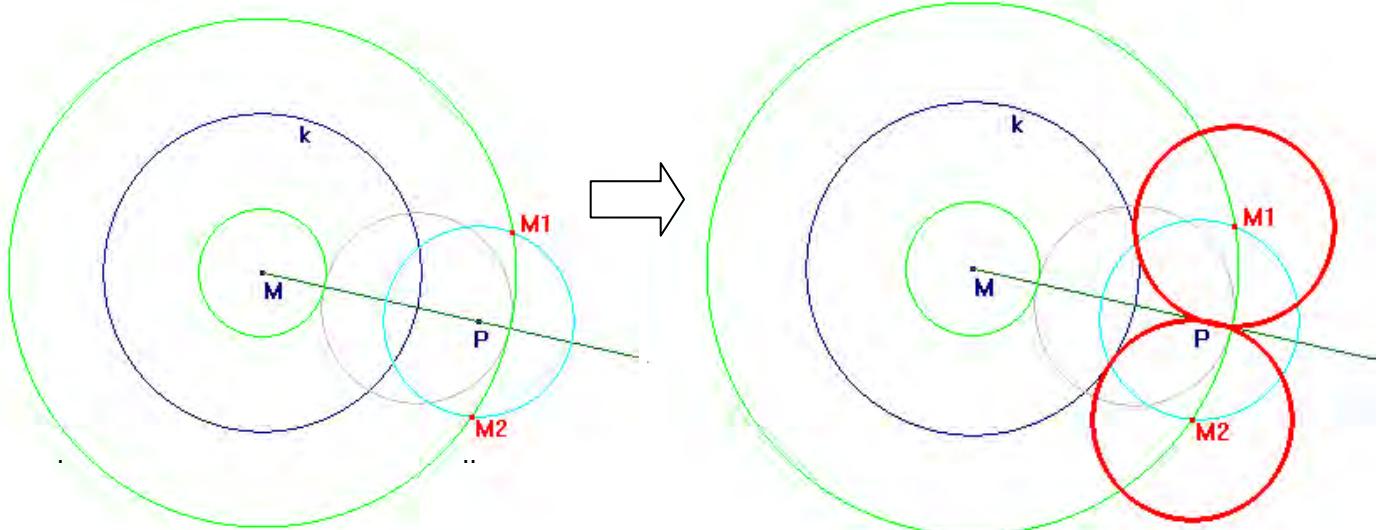


### Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

1. / 2. / 3. Schritt:

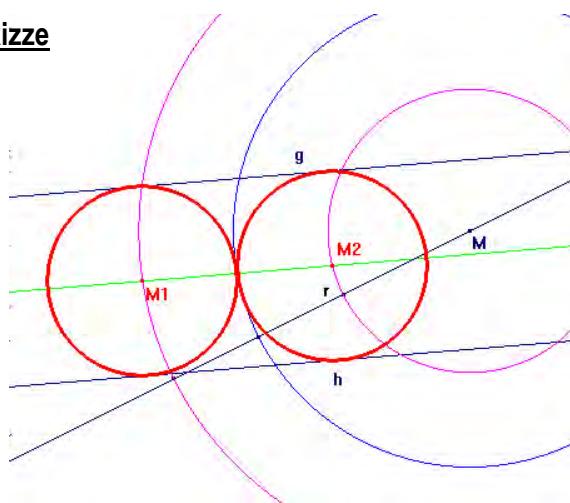
4. Schritt / Lösung



### 4.3 Weitere Konstruktion 3:

Kreise, die zwei parallele Geraden und einen Kreis berühren.

#### Skizze

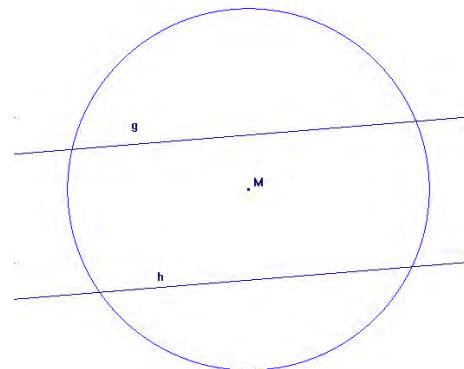


#### KB (Lösungsplan):

1. Mittelparallele von  $g, h$  ( $\rightarrow$  dies, weil der Mittelpunkt des Berührungs Kreises genau zwischen  $g$  und  $h$  liegen muss  $\rightarrow$  gleicher Abstand von zwei parallelen Geraden = Mittelparallele)
2. Den gegebenen Kreisradius um die Hälfte des Abstandes von  $g$  und  $h$  vergrößern (rsp. verkleinern)  $\rightarrow$  Der gesuchte Kreisradius entspricht dem Abstand von Mittelparallele zur Gerade  $g$  und  $h$ , also hat der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auch diesen entsprechenden Abstand vom gegebenen Kreis  $k$ .
3. Den grösseren und kleineren Kreis mit der Mittelparallelen schneiden  $\rightarrow M_1, M_2, M_3, M_4$
4. Lösungen einzeichnen (4 Lösungen)

#### Ausgangslage / Aufgabenstellung:

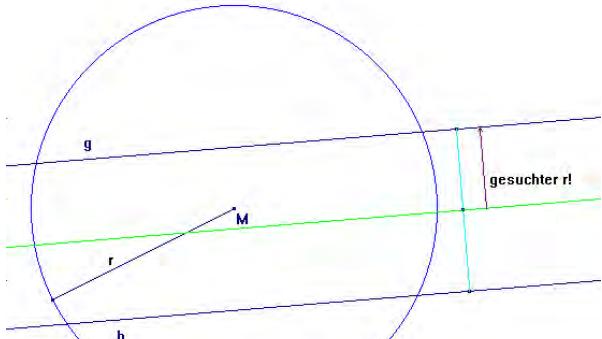
Konstruiere einen Kreis mit, welcher die beiden parallelen Geraden  $g$  und  $h$ , sowie den gegebenen Kreis  $k$  ( $M, r = 5\text{cm}$ ,  $Mg = 1.5\text{cm}$ ,  $Mh = 2.5\text{cm}$ ).



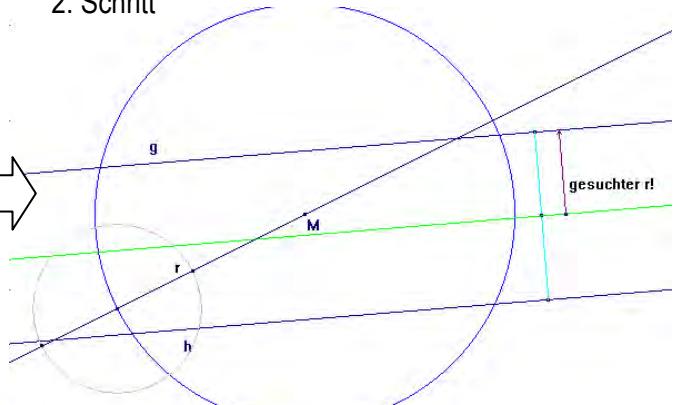
#### Konstruktionsschritte:

(Die Nummerierung entspricht dem Lösungsplan)

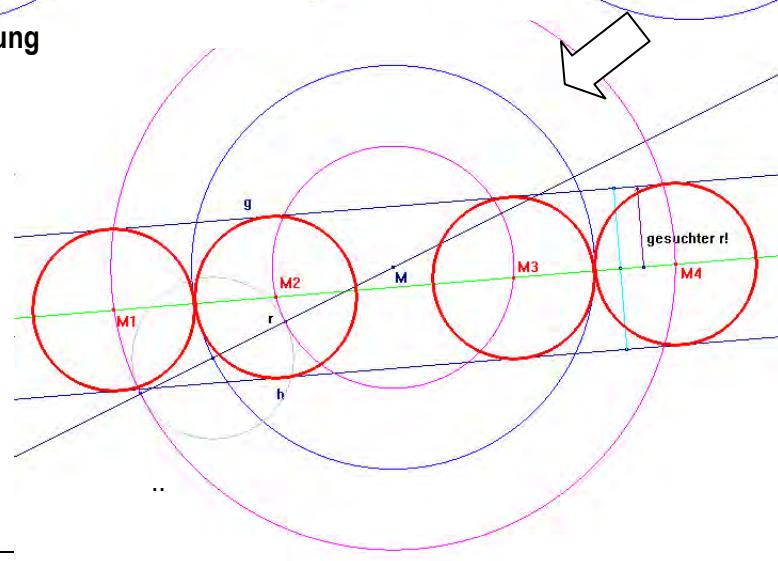
1. Schritt:



2. Schritt



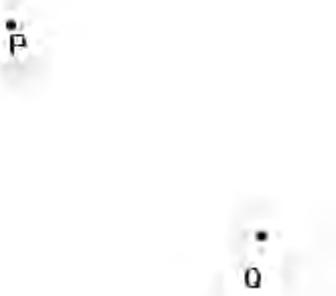
3./4. Schritt / Lösung



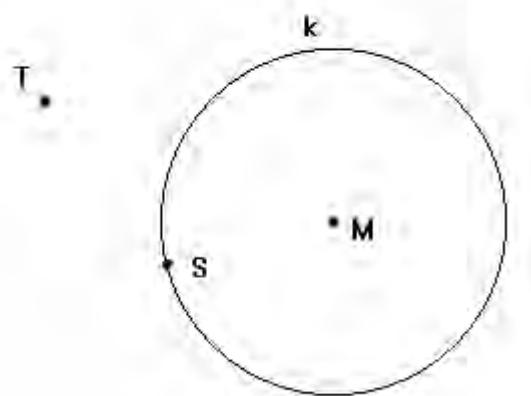


## Aufgaben Kreiskonstruktionen:

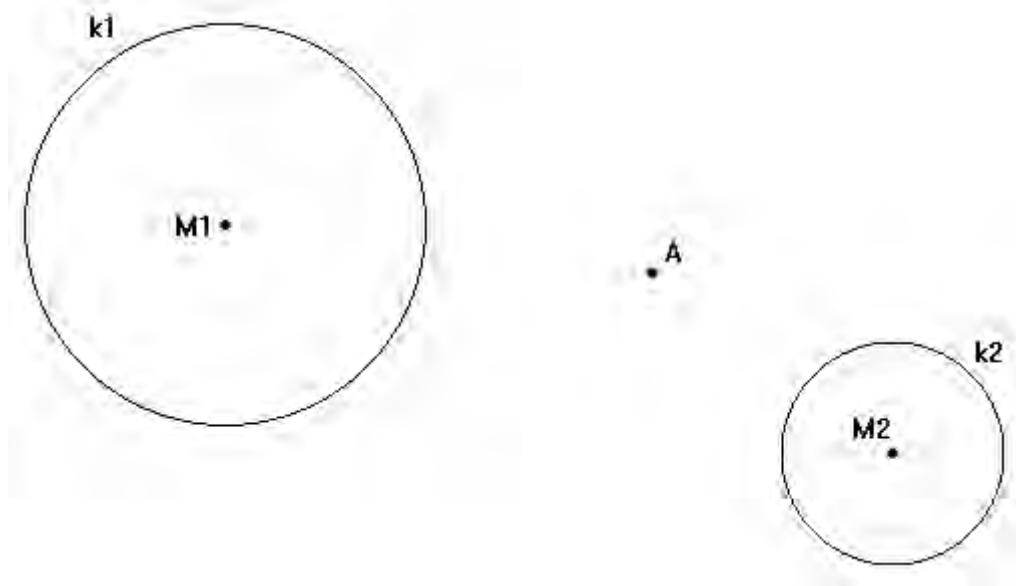
1. Konstruiere alle Kreise  $k$  mit Radius 3.5cm, welche durch die gegebenen Punkte  $P$  und  $Q$  gehen.



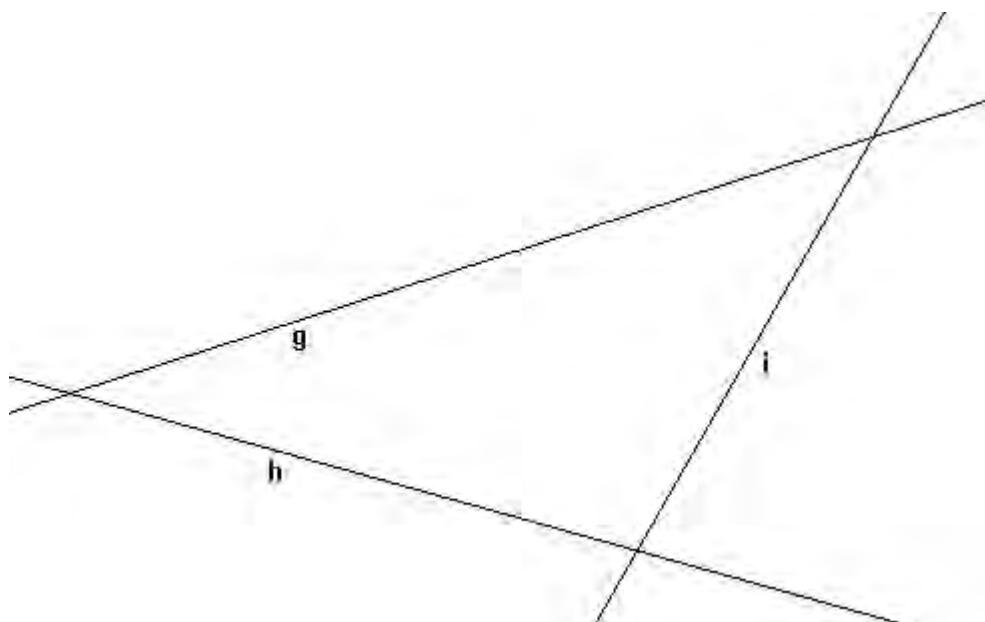
2. Konstruiere einen Kreis, der den gegebenen Kreis  $k$  in  $S$  berührt und der durch  $T$  geht.



3. Gegeben sind der Kreis  $k_1$ , der Kreis  $k_2$  und der Punkt A ausserhalb der Kreise. Konstruiere alle Tangenten an die Kreise  $k_1$  und  $k_2$ , welche durch A gehen. (Also: Tangenten an  $k_1$  durch A, Tangenten an  $k_2$  durch A, kein Zusammenhang zwischen den beiden Teilaufgaben)



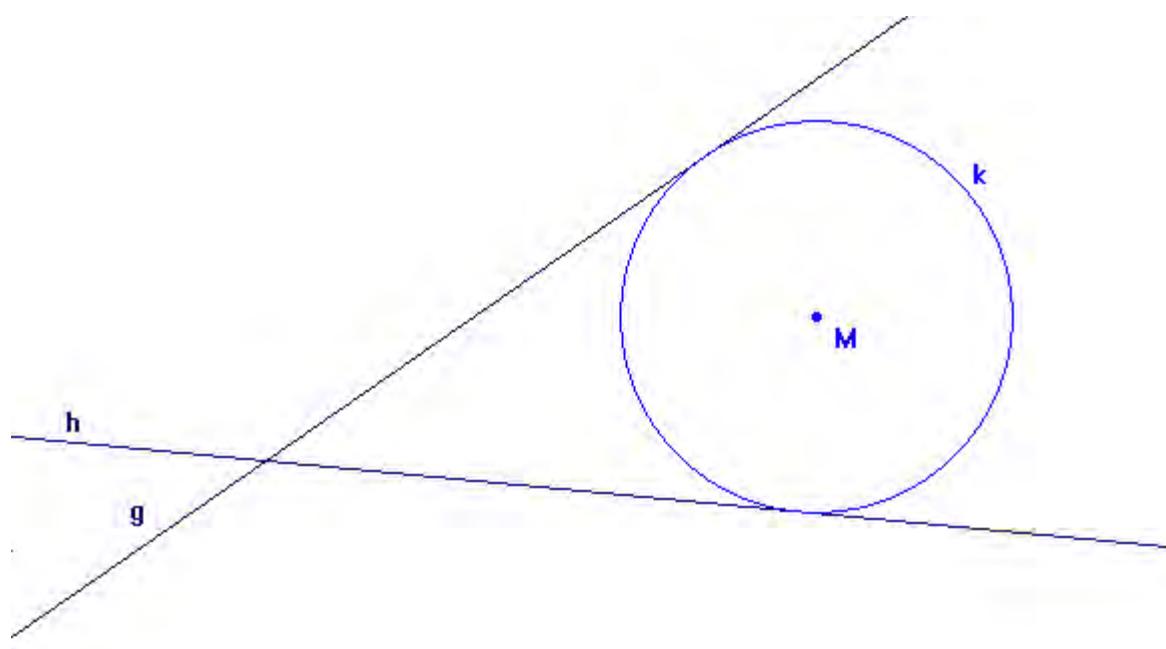
4. Gegeben sind die Geraden g, h und i. Zeichne einen Kreis, der g, h und i berühren.



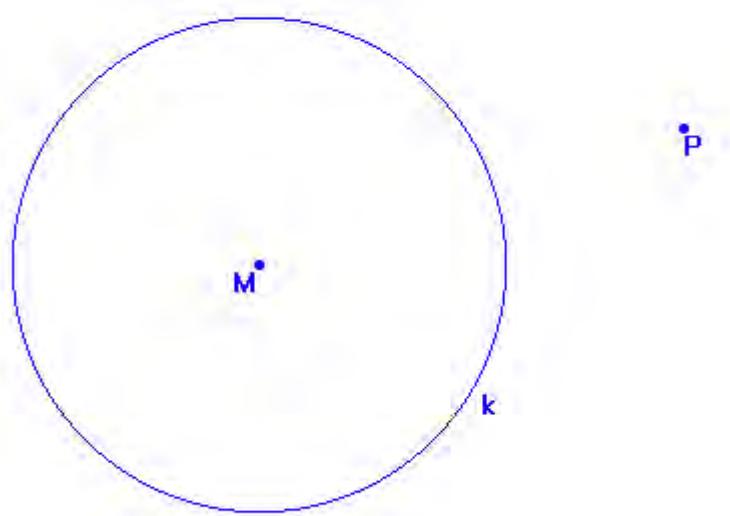
5. Konstruiere alle Geraden, die von einem Punkt A 1cm und von einem Punkt B 3cm Abstand haben.



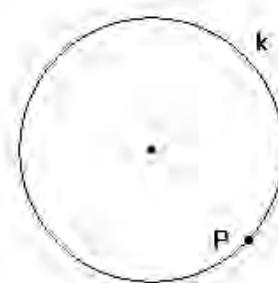
6. Gegeben sind der Kreis k, sowie die Geraden g und h. Konstruiere alle Kreise, die g, h und k berühren.



7. Gegeben sind ein Kreis  $k$  und der Punkt  $P$ . Konstruiere eine Sekante, die durch  $P$  geht und die aus dem Kreis eine Sehne von 5cm Länge herausschneidet.

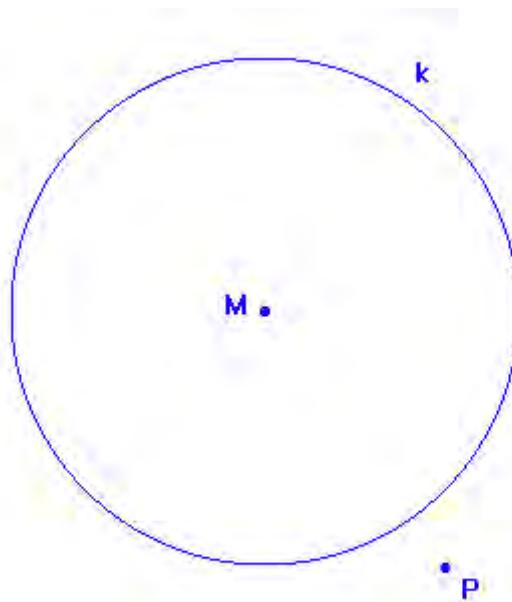


8. Konstruiere alle Kreise, die den Kreis  $k$  in  $P$  und zudem die Gerade  $g$  berühren.

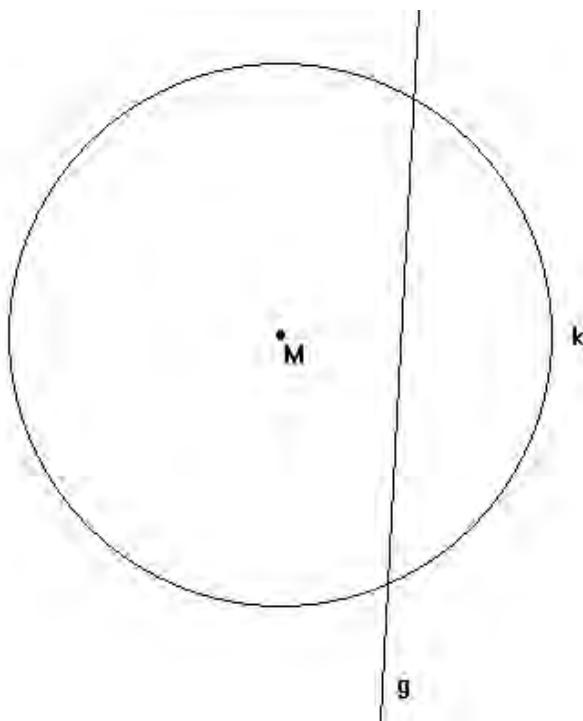


g

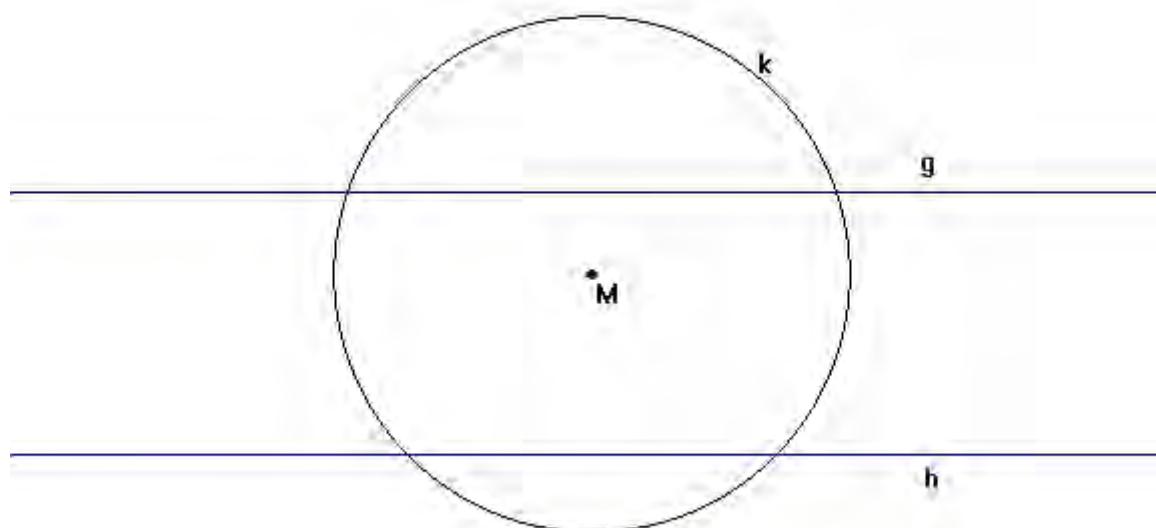
9. Konstruiere alle Kreise mit 2.5cm Radius, welche den gegebenen Kreis k berühren und die durch den Punkt P gehen.



10. Konstruiere alle Kreise mit 1.3cm Radius, welche den Kreis k und zudem die Gerade g berühren



11. Konstruiere alle Kreise, welche die beiden Parallelten Geraden  $g$  und  $h$ , sowie den Kreis  $k$  berühren.



12. Konstruiere das Dreieck ABC ( $\rho$  = Inkreisradius). Skizziere die Figur vorher.



a)  $\alpha = 35^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ ;  $\rho = 1.5\text{cm}$

Skizze:	KB:
	..... ..... ..... ..... ..... ..... .....

b)  $b = 4\text{cm}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\rho = 1.5\text{cm}$



Skizze:	KB:

c)  $\beta = 35^\circ$ ;  $ha = 5\text{cm}$ ;  $\rho = 1.5\text{cm}$



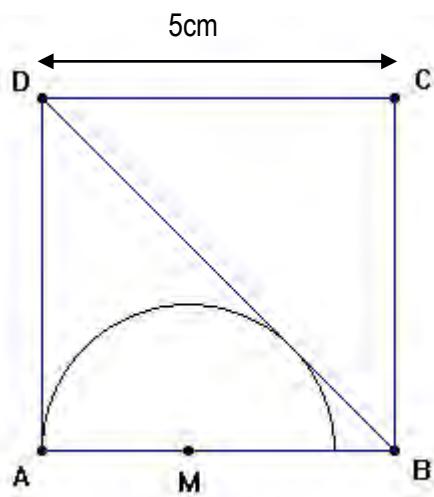
Skizze:	KB:

d)  $c = 5\text{cm}$ ;  $hb = 4\text{cm}$ ;  $\rho = 1.2\text{cm}$



Skizze:	KB:

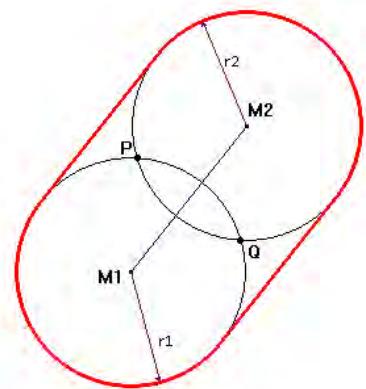
13. Konstruiere die skizzierte Figur im Quadrat ABCD (ohne Skizze, mit KB).





## Aufgaben Kreisberechnung

14. Berechne den Umfang der Figur, wenn du weisst, dass  $r_1 = r_2$ ,  $PQ = 10a$  und  $M_1M_2 = 24a$ .



### 15. Berechne Umfang und Fläche der Figur

