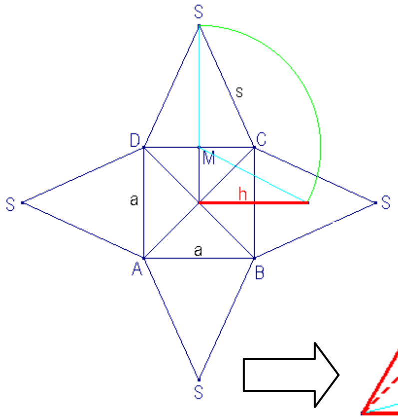
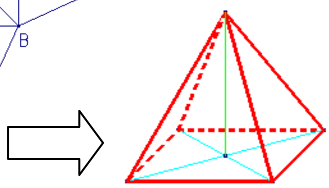
Seiten 4 / 5

Aufgaben „Die gerade Pyramide“

1 Vorbemerkung: Die Konstruktionsaufgaben sind verkleinert gezeichnet.

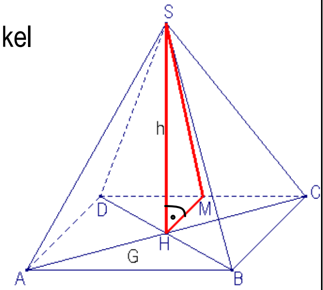
a)





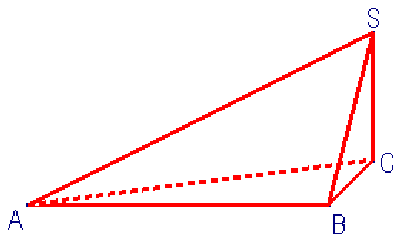
Aus dem Netz wird die Pyramidenhöhe herauskonstruiert. Dies mit dem rechtwinkligen Dreieck HMS, wie im Raumbild angedeutet.

(Hier durch den rechten Winkel bei H und dem „herunter-klappen“ der Strecke MS)



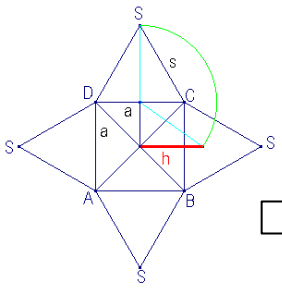
Danach können wir mit Hilfe der gegebenen Strecken AB, BC und der herauskonstruierten Höhe h das Raumbild fertig stellen. (Vorsicht, BC ist um die Hälfte verkürzt wegen der Raumbild-Darstellung) (KB unter 1c)

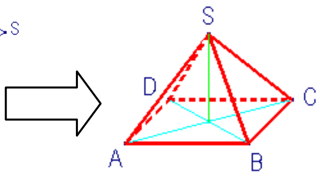
b)



1. AB zeichnen, BC im 45°-Winkel und um die Hälfte verkürzt anhängen (Raumbild!)
2. Aus dem Netz die Strecke SC in den Zirkel nehmen und senkrecht zur Strecke AB bei der Ecke C ansetzen. → S.
3. Vervollständigen.

c)

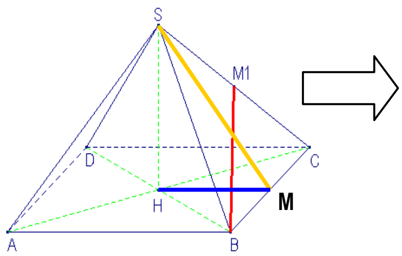


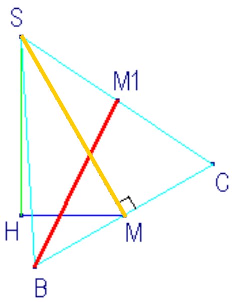


Die Konstruktion verläuft genau gleich wie bei 1a).

1. Mittelpunkt H der Grundfläche zeichnen (Netz)
2. Mittelpunkt M von CD zeichnen (Netz)
3. Lot auf DC durch H (Netz)
4. MS mit Zirkel von M aus abtragen→
   k (M, r = MS) ∩ Lot = S, HS = gesuchte Höhe h (Netz)
5. Raumbild mit der Grundfläche ABCD beginnen (Masse aus dem Netz mit Zirkel herausmessen)
6. Mittelpunkt der Grundfläche konstruieren (Diagonalenschnittpunkt H)
7. Senkrechte auf AB durch H zeichnen, von H aus mit dem Zirkel die konstruierte Höhe übertragen → S
8. Pyramide vervollständigen.

2 a)





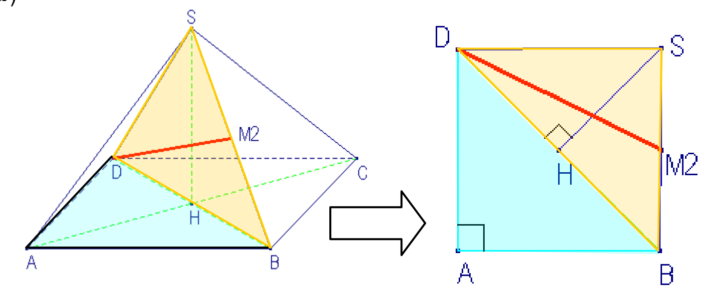
HM = 2cm
HS = 3.5cm
MB = 2cm (weil die Höhe im gleichsch. Dreieck die Basis halbiert)

Mit dem eingezeichneten Dreieck HMS konstruieren wir zuerst die Höhe der Seitenfläche. Danach können wir das gleichschenklige Dreieck SBC zeichnen und darin die gesuchte Strecke abtragen. (Die Basis BC ist senkrecht zur Höhe MS!)

Seiten 5 / 6 / 7

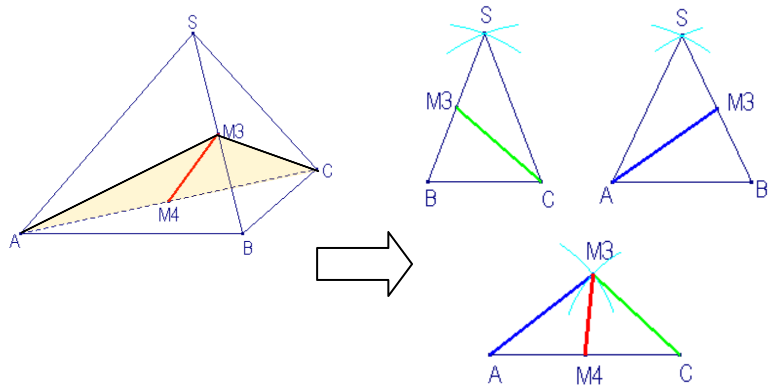
Aufgaben „Die gerade Pyramide“

b)



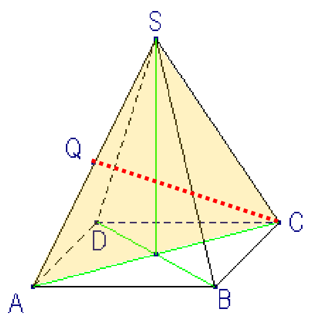
1. Konstruktion des rechtwinkligen Dreicks ABD.
2. BD halbieren → H
3. Höhe h senkrecht auf BD bei H abtragen → S
4. Dreieck BDS zeichnen
5. SB halbieren → M_2
6. DM_2 verbinden.

c)



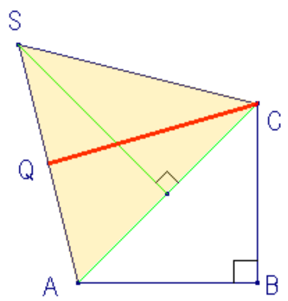
1. Konstruktion der Strecke CM_3 im Dreieck BCS
2. Konstruktion von AM_3 im Dreieck ABS
3. Mit Zirkel die entsprechenden Strecken übertragen und das Dreieck ACM_3 zeichnen.
4. AC halbieren → M_4
5. M_3M_4 verbinden.

3. a)
b)



1. G = 11.56cm² (quadratische Grundfläche). ➔ Also ist die Seitenlänge = $\sqrt{11.56}$ = 3.3 cm
2. Somit kann man die Pyramide zeichnen (nach hinten verlaufende Strecken halbieren)
3. Den Punkt Q im Raumbild einzeichnen
4. Die Schnittfläche einzeichnen

c)
d)



5. Die Strecke AC im Dreieck ABC konstruieren
6. Lot auf AC durch den Mittelpunkt von AC, Höhe h = 4cm abtragen → S
7. Dreieck ACS zeichnen
8. AS halbieren → Q
9. QC verbinden.

4

	AB	BC	h	V
a)	3.5 cm	3.2 cm	6cm	**22.4 cm³**
b)	34 cm	12 cm	**25.5cm**	3468 cm³
c)	25 dm	**21.42 dm**	9 dm	1606.5 dm³
d)	**27.02 m**	**27.02 m**	4.3 m	1046.448 m³
e)	3d	4e	9f	**36def**
f)	**24a**	24a	6a	1152a³

Die verwendeten Formeln entsprechen denjenigen, die im Theorieteil des Dossier angegeben sind. Bitte dort nachschauen.
Wird das Volumen verwendet, muss es zuerst mal 3 gerechnet werden!

Seiten 7 / 8

Aufgaben „Die gerade Pyramide“

5 a) $V = \frac{G \bullet h}{3}$, also $\mathbf{V} = \frac{4 \bullet 4 \bullet 5}{3} = \frac{80}{3}$ **= 26.667 cm³**

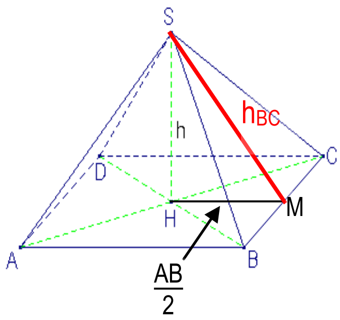
Für die Oberfläche rechnen wir zuerst mit Pythagoras die Höhe h_{BC} aus (Höhe des Seitendreiecks BCS. in der quadratischen Pyramide ist dies die einzige benötigte Höhe für den Mantel.

Also: $\mathbf{h_{BC}} = \sqrt{HM^2+HS^2} = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} =$ **5.39 cm**

Damit ist die **Seitenfläche BCS =** $\frac{h_{BC} \bullet BC}{2} = \frac{5.39 \bullet 4}{2} =$ **10.77 cm²**

Und dies heisst, dass der **Mantel** = 4 • BCS = 4 • 10.77 cm² = **43.08 cm²**

Und somit ist die **Oberfläche S** = G + S = 4 • 4 + 43.08 = **59.08 cm²**



V =26.667 cm³
S = 59.08 cm²

6 a) Die Grundfläche einer quadratischen Pyramide ist 46.24 cm². Damit ist die Kantenlänge dieses Quadrates a = $\sqrt{46.24}$ = 6.8 cm.

Die Oberfläche beträgt 122.4 cm², womit der Mantel <u>M</u> = 122.4 – 46.24 = <u>76.16 cm²</u> gross ist.

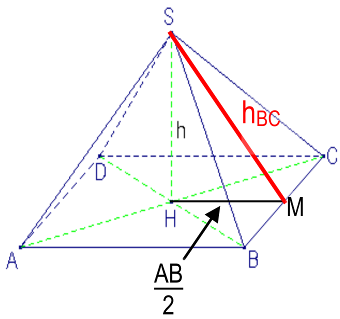
Also ist eine <u>Seitenfläche</u> (ein Seitendreieck) = $\frac{76.16}{4}$ = <u>19.04</u> cm² gross.

Die **Höhe des Seitendreieckes** ist also = $\frac{\text{Fläche} \bullet 2}{\text{Grundseite}} = \frac{19.04 \bullet 2}{6.8} =$ **5.6 cm**.

Mit Pythagoras können wir jetzt die Pyramidenhöhe berechnen:

$\mathbf{h} = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{5.6^2 - 3.4^2} =$ **4.45 cm.**

Also ist das Volumen der Pyramide = $V = \frac{G \bullet h}{3} = \frac{46.24 \bullet 4.45}{3}$ = **68.59cm³**

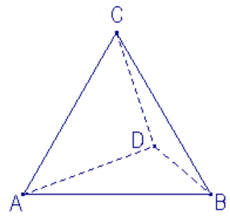


h =4.45 cm
V = 68.59 cm³

7 a) Die Grundfläche des Tetraeders ist ein gleichseitiges Dreieck. Gemäss unseren früheren Pythagoras-Überlegungen ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck $h = \frac{s \bullet \sqrt{3}}{2}$. In unserem Fall also = $\frac{10 \bullet \sqrt{3}}{2} = 5 \bullet \sqrt{3} = 8.66$ cm

Also ist die **Grundfläche** = $\frac{\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}}{2} = \frac{10 \bullet 8.66}{2} =$ **43.3 cm²**

Dies ist gleichzeitig die Fläche jeder Seitenfläche. Die **Oberfläche des Tetraeders** ist also = 4 • 43.3 = **173.21 cm²**



S = 173.21 cm²

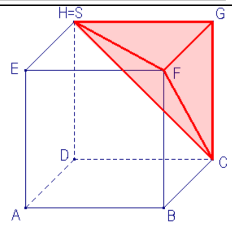
8 a) In dieser Figur brauchen wir zwei Formeln aus dem Pythagoras-Bereich:

1. Diagonale im Quadrat (d = $5 \bullet \sqrt{2}$)
2. Höhe im gleichseitigen Dreieck: $h = \frac{s \bullet \sqrt{3}}{2}$

Die Grundseite dieser Pyramide ist das Dreieck GFC. Dies ist zum Berechnen besonders einfach.

$V = \frac{G \bullet h}{3}$, wobei die Grundseite $G = \frac{a^2}{2}$, also $\mathbf{V} = \frac{a^2}{2} \bullet \frac{a}{3} = \mathbf{\frac{a^3}{6}}$

mit Zahlen: $\mathbf{V = \frac{10^3}{6} = \frac{1000}{6}}$ **= 166.667 cm³**



Seite 8

Aufgaben „Die gerade Pyramide“

8 b) Die Berechnung der Oberfläche ist etwas schwieriger. Dabei setzt sie sich zusammen aus den vier Dreiecksflächen. Die Dreiecke GFC, HGC und FGH sind dabei kongruent und einfach zu berechnen:

$A_{FGC} = A_{FGH} = A_{CGH} = \frac{a^2}{2}$

Das Dreieck HFC dagegen ist gleichseitig und zwar
mit der Seitenlänge $\mathbf{s = a\sqrt{2}}$.

Somit ist die **Höhe dieses Dreiecks HFC** = **h** = $\frac{s \bullet \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2} \bullet \sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{a\sqrt{6}}{2}}$

Und dies führt und zur Fläche des Dreiecks HFC:

$A_{HFC} = \frac{\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}}{2}$

$$A_{HFC} = \frac{a\sqrt{2} \bullet \frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\frac{a^2\sqrt{12}}{2}}{2} = \frac{\frac{a^2\sqrt{4} \bullet \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{a^2 \bullet 2 \bullet \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Die gesamte Oberfläche ist also $S = 3 \bullet \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^2\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Mit Zahlen gerechnet $\mathbf{S} = 10^2\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 100\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{236.60\ cm^2}$

9 a) Das Volumen einer Pyramide ist ja bekanntlich $V = \frac{G \bullet h}{3}$

In unserem Fall ist G = Seitenfläche des Würfels (Quadratfläche) a^2
Die Höhe ist nicht bekannt.

Bekannt ist aber, dass das Volumen des Körpers um drei Viertel des Würfelvolumens vergrössert wird. Also entsprechen alle sechs aufgesetzten Pyramiden diesen drei Vierteln des Würfelvolumens. Als Gleichung

$$\frac{3}{4} \bullet a^3 = 6 \bullet \frac{a^2 \bullet h}{3}$$

Aufgelöst ergibt diese Gleichung:

$\frac{3a^3}{4} = \frac{6a^2 \bullet h}{3}$ ¦¦ v

$\frac{3a^3}{4} = 2a^2 \bullet h$ ¦¦ • HN (4)

$3a^3 = 8a^2 \bullet h$ ¦¦ : $8a^2$

$\frac{3a}{8} = h$ Die Pyramiden haben also eine Höhe von $\mathbf{h = \frac{3a}{8}}$

Seite 11

Aufgaben „Der gerade Kreiskegel"

1 a) Mit den Formeln lassen sich alle Aufgaben relativ leicht berechnen:

$\mathbf{V} = \frac{G \bullet h}{3} = \frac{32 \bullet 12}{3} = \mathbf{128\ cm^3}$

Formeln im Theorieteil des Dossier nachschauen!

b) Wenn der Grundkreisumfang 43 cm misst ist der Radius dieses Grundkreises $r = \frac{u}{2 \bullet \pi}$

$r = \frac{43}{2 \bullet \pi} = 6.84 cm$ und somit ist $G = r^2\pi = 147.14\ cm^2$

$V = \frac{G \bullet h}{3}$, also ist $\mathbf{h} = \frac{3 \bullet V}{G} = \frac{3 \bullet 565}{147.14} = \mathbf{11.52\ cm}$

c) $V = \frac{G \bullet h}{3}$, also ist $G = \frac{3 \bullet V}{h} = \frac{3 \bullet 348646}{340} = 3076.29\ cm^2$

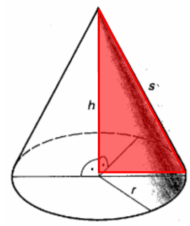
Und damit lässt sich r berechnen, denn $G = r^2\pi$,

also ist $\mathbf{r} = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{3076.29}{\pi}} = \mathbf{31.29\ cm}$

2 a) $M = \pi rs$, also müssen wir zuerst noch die Strecke s berechnen. (Dies geht mit Pythagoras im skizzierten Dreieck)

$s = \sqrt{15^2 + 21^2} = 25.81$ cm

Und somit ist $\mathbf{M} = \pi rs = \pi \bullet 15 \bullet 25.81 = \mathbf{1216.13\ cm^2}$



Das „Pythagoras-Dreieck" ist rot markiert. s ist dabei die Hypothenuse, r und h sind Katheten.

b) Für die Oberfläche brauchen wir zuerst den Radius der Grundfläche. Also auch hier mit Pythagoras im rot markieren Dreieck:

$r = \sqrt{51^2 - 41^2} = 30.33$ cm

$S = \pi r^2 + \pi rs = \pi r (r+s)$, also $\mathbf{S} = \pi \bullet 30.33 \bullet (30.33+51) = \mathbf{7750.016\ cm}$

c) $\alpha = \frac{360° \bullet r}{s}$, dies die Formel für den Netzwinkel. Hier genügt es, die gegebenen Werte einzusetzen, also:

$\boldsymbol{\alpha} = \frac{360° \bullet r}{5r} = \frac{360°}{5} = \mathbf{72°}$

3

Berechnung im Kreiskegel

$G = r^2\pi = (2r)^2\pi = 4 r^2 \pi$

$\mathbf{V} = \frac{4 r^2 \pi \bullet 5r}{3} = \mathbf{\frac{20 r^3 \pi}{3}}$

Berechnung in der Pyramide

G = Länge • Breite $= 4r \bullet 4r = 16r^2$ (quadratische Pyramide)

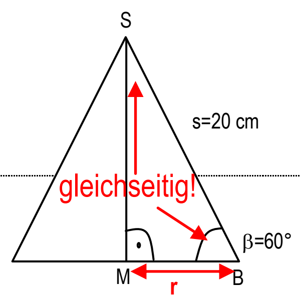
$V = \frac{20 r^3 \pi}{3}$ (Volumengleich wie der Kegel).

Die Höhe ist somit $h = \frac{3 \bullet V}{G} = \frac{3 \bullet 20 r^3 \pi}{3 \bullet 16 r^2} = \frac{5 r\pi}{4} = \mathbf{1.25r\ \pi}$

oder $\mathbf{h = 3.93r}$

4 a) Für den Netzwinkel brauchen wir r und s. **Das gegebene Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck (dies ist mit dem Winkel β = 60° und der Angabe: gerader Kreiskegel gegeben).** Also ist der Radius r = 10cm

$\boldsymbol{\alpha} = \frac{360° \bullet r}{s} = \frac{360° \bullet 10}{20} = \mathbf{180°}$



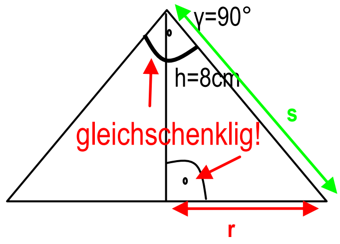
b) Die Oberflächenformel heisst: $S = \pi r^2 + \pi rs = \pi r (r+s)$. Da wir s und r kennen, können einfach einsetzen.

$\mathbf{S} = \pi r^2 + \pi rs = \pi r (r+s) = \pi \bullet 10(10+20) = \pi \bullet 10 \bullet 30 = \mathbf{300\pi = 942.48\ cm^2}$

Seite 12

Aufgaben „Der gerade Kreiskegel“

5 a) **Das gegebene Dreieck ist ein rechtwinklig – gleichschenkliges Dreieck (dies ist mit dem Winkel γ = 90° und der Angabe „gerader Kreiskegel“ gegeben).** Also ist der Radius r = h = 8cm. Und nach Pythagoras ist die Strecke $s = 8 \bullet \sqrt{2} = (11.314 \text{ cm})$



Somit ist die Grundfläche $G = r^2\pi = 8^2\pi = 64\pi = 201.062 \text{ cm}^2$

Das Volumen beträgt: $V = \frac{G \bullet h}{3} = \frac{64\,\pi \bullet 8}{3}$ = **536.17 cm³**

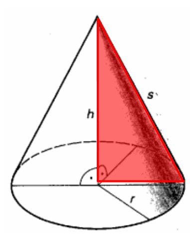
b) Die Mantelfläche berechnet sich nach Formel durch

M $= \pi rs = \pi \bullet 8 \bullet 8 \bullet \sqrt{2}$ = $\mathbf{64\pi \bullet \sqrt{2}\ cm^2 = 284.345\ cm^2}$

6 a) Aus den gegebenen Grössen lässt sich die Höhe h und der Radius r einfach berechnen:

1. $h = \frac{3 \bullet V}{G} = \frac{3 \bullet 6971.25}{267.83} = 78.086 \text{ cm}$

2. $r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{267.83}{\pi}} = 9.233 \text{ cm}$



Damit können wir jetzt die Mantellinie mit Pythagoras berechnen, es gilt dabei:

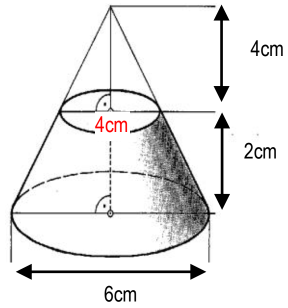
s= $\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{9.233^2 + 78.086^2}$ **= 78.630 cm**

b) Die Mantelfläche berechnet sich nach Formel durch

M $= \pi rs = \pi \bullet 9.233 \bullet 78.630$ **= 2280.83 cm²**

c) $\alpha = \frac{360° \bullet r}{s} = \frac{360° \bullet 9.233}{78.630}$ **= 42.27°**

7 a) Durch Ähnlichkeit kann man den Durchmesser der Deckfläche des Kegelstumpfes berechnen. Die Gesamthöhe zur Höhe des kleinen Stumpfes verhalten sich wie 6:4, also verhalten sich die Durchmesser entsprechend.



Das Volumen des Restkörpers berechnet sich jetzt durch die Differenz des ganzen Kreiskegels minus des kleinen, abgeschnittenen Kreiskegels.

Also $V_{Restkörper} = V_{grosser\ Kegel} - V_{kleiner\ Kegel}$

$G_{grosser\ Kegel} = r^2\pi = 3^2\pi = 9\pi$

$G_{kleiner\ Kegel} = r^2\pi = 2^2\pi = 4\pi$

$V_{grosser\ Kegel} = \frac{9\pi \bullet 6}{3} = 18\pi \text{ cm}^3$

$V_{kleiner\ Kegel} = \frac{4\pi \bullet 4}{3} = \frac{16\pi}{3} \text{ cm}^3$

$V_{Restkörper} = V_{grosser\ Kegel} - V_{kleiner\ Kegel} = 18\pi \text{ cm}^3 - \frac{16\pi}{3} \text{ cm}^3 = \frac{38\pi}{3} \text{ cm}^3 = \mathbf{39.794\ cm^3}$

b) **Der Netzwinkel des grossen Kegels beträgt:** $\alpha = \frac{360° \bullet r}{s} = \frac{360° \bullet 3}{6}$ **= 180°**

Entsprechend zeichnen wir den Mantel des grossen Kegels und dazu denjenigen des kleinen Kegels in die gleiche Figur. Die „Restfigur“ ist die Gesuchte.