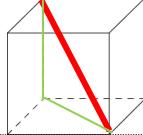




Lösungen Mathematik 3 – Dossier 3 – Potenzen, Wurzeln und Binome

Seiten 5/6 Potenzen, Wurzeln und grosse Zahlen

1	a)	$\sqrt[3]{59.57}$	= 3.905493027 = 3.905	(mit TR lösen)
	b)	$\sqrt[3]{656.589}$	= 8.691562701 = 8.692	(mit TR lösen)
	c)	$\sqrt[3]{125.125}$	= 5.001666111 = 5.002	(mit TR lösen)
	d)	$\sqrt[3]{30.8994}$	= 3.137978874 = 3.138	(mit TR lösen)
	e)	$\sqrt[3]{\frac{30}{1256}}$	= 0.287989866 = 0.288	(mit TR lösen)
	f)	$\sqrt[5]{\frac{(9.125+23)^2+25}{1.3588}}$	= 3.786039789 = 3.786	mit TR lösen, Vorsicht mit Klammern! Eingabe unter Wurzel: (((9.125+23)²+25)/1.3288) dann 5.Wurzel..
	2	a)	Kantenlänge $s = \sqrt[3]{42875} = 35 \text{ cm}$	
	b)	kleiner Würfel: $V = 45025 \text{ l} = 45025 \text{ dm}^3 \rightarrow s = \sqrt[3]{45025} = 35.576 \text{ dm}$		
	c)	grosser Würfel $V = 45025 \text{ dm}^3 \bullet 2 = 90050 \text{ dm}^3 \rightarrow s = \sqrt[3]{90050} = 44.822 \text{ dm}$		
	d)	Volumen des Quaders = 73695 cm³ Mit den gegebenen Kantenlängen ist dieses Volumen = $5s \bullet 3s \bullet s = 15s^3$ Damit kann die Kantenlänge s berechnet werden: $s = \sqrt[3]{\frac{73695}{15}} = 17 \text{ cm}$. Die Kanten sind somit s=17cm ; 3s = 51cm; 5s = 85 cm		
	e)	Volumen des Würfels: 2197 cm^3 Damit ist die Seitenlänge $s = \sqrt[3]{2197} = 13 \text{ cm}$. Die Körperdiagonale wird jetzt mit Pythagoras berechnet: (Doppelter Pythagoras) $d = \sqrt{13^2 + 13^2 + 13^2} = 22.517 \text{ cm}$		
3	a)	$V = \frac{4\pi s^3}{5}$	→ Umformen mit „Seilbahnprinzip“ → $s = \sqrt[3]{\frac{5V}{4\pi}}$	
	b)	$V = \frac{s^3}{3} - 4$	→ Umformen mit „Seilbahnprinzip“ → $s = \sqrt[3]{3(V+4)} = \sqrt[3]{3V+12}$	
	c)	$V = \frac{3\pi s^3}{4} + 2s^3$	→ Gleichnamigmachen, dann Umformen mit „Seilbahnprinzip“ →	
		$V = \frac{3\pi s^3}{4} + \frac{8s^3}{4} = \frac{s^3(3\pi+8)}{4}$	→ Somit $s^3 = \frac{4V}{3\pi+8}$ → $s = \sqrt[3]{\frac{4V}{3\pi+8}}$	
4	a)	$3^{-2} \bullet 3^{15}$	= $3^{-2+15} = 3^{13} = 1'594'323$	
	b)	$14^3 \bullet 35^3$	= $(14 \bullet 35)^3 = 490^3 = 117'649'000$	
	c)	$7^6 : 7^3$	= $7^{6-3} = 7^3 = 343$	
	d)	$14^9 : 14^{-3}$	= $14^{9-(-3)} = 14^{12} = 5.669391237 \bullet 10^{13}$	
	e)	$11^{13} \bullet 11^{15}$	= $11^{13+15} = 11^{28} = 1.442099361 \bullet 10^{29}$	
	f)	$0.003^5 \bullet 0.003^{-2}$	= $0.003^{5-2} = 0.003^3 = 0.000000027$	



Seiten 6 / 7
Potenzen, Wurzeln und grosse Zahlen

5 6 7 8 9	a)	$(15 \cdot 7)^3 = 15^3 \cdot 7^3 = 105^3 = 1'157'625$
	b)	$(abc)^4 = a^4 b^4 c^4$
	c)	$c^{14} : c^8 = c^{14-8} = c^6$
	d)	$3c^3 + 12c^3 = 15c^3 = c^3(3+12)$
	e)	$\frac{4x^6}{3} \cdot \frac{9x^3}{8} = \frac{4x^6 \cdot 9x^3}{3 \cdot 8} = \frac{4x^6 \cdot 9x^3}{3 \cdot 8} = \frac{3x^9}{2}$
	f)	$\frac{4x^6}{3} \cdot \frac{9x^4}{24} = \frac{4x^6}{3} \cdot \frac{24}{9x^4} = \frac{4x^6 \cdot 24}{3 \cdot 9x^4} = \frac{4x^6 \cdot 24}{3 \cdot 9x^4} = \frac{4 \cdot 8x^2}{9} = \frac{32x^2}{9}$
	a)	8 Nullen (Millionen haben 6 Nullen, die 100 hat zwei, also $6+2 = 8$)
	b)	23 Nullen (Trillionen haben 18 Nullen, 5 Nullen sind zusätzlich, also $18 + 5 = 23$)
	c)	12 Nullen (Billionen haben 12 Nullen)
	d)	13 Nullen (Milliarden haben 9 Nullen, zusätzlich kommen hier 4 Nullen dazu, also $9+4 = 13$)
	a)	10^5
	b)	10^3
	c)	10^{13}
	d)	10^{17}
	e)	10^0 (Definitionsgemäss ist x^0 , also irgendeine Zahl hoch Null = 1)
	a)	$25987 \cdot 10^3 = 2.5987 \cdot 10^7$ Das Komma wird 4 Stellen nach links geschoben, also → Exponent +4.
	b)	$268 \cdot 10^6 = 2.68 \cdot 10^8$ Das Komma wird 2 Stellen nach links geschoben, also → Exponent +2.
	c)	$234 \cdot 10^8 = 2.34 \cdot 10^{10}$ Das Komma wird 2 Stellen nach links geschoben, also → Exponent +2.
	d)	$763.5 \cdot 10^9 = 7.635 \cdot 10^{11}$ Milliarden sind 10^9 , dann das Komma um 2 Stellen nach links → Exponent +2
	e)	$79.26 \cdot 10^6 = 7.926 \cdot 10^7$ Millionen sind 10^6 , dann das Komma um 1 Stelle nach links → Exponent +1
	f)	$168.34 \text{ km}^3 = 1.6834 \cdot 10^2 \text{ km}^3$
	g)	$0.259 \text{ m} = 2.59 \cdot 10^{-1} \text{ m}$
	h)	$5687.45 \text{ s} = 5.68745 \cdot 10^3 \text{ s}$
	a)	$8 \cdot 10^6 = 8'000'000$
	b)	$98 \cdot 10^7 = 980'000'000$
	c)	$15 \cdot 10^3 = 15'000$
	d)	$1,23 \cdot 10^5 = 123'000$
	e)	$45 \cdot 10^7 = 450'000'000$
	f)	$1586 \cdot 10^{-5} = 0.01586$
	g)	$125.248 \cdot 10^{-3} = 0.125248$



Lösungen Mathematik 3 – Dossier 3 – Potenzen, Wurzeln und Binome

Seiten 12/13

Produkt von zwei Binomen / Binome in Trinome verwandeln

1 2 3	a) $(r+8)(s-11) = rs - 11r + 8s - 88$
	b) $(x+3)(x-8) = x^2 - 8x + 3x - 24 = x^2 - 5x - 24$
	c) $(19y+3)(8-4y) = 152y - 76y^2 + 24 - 12y = -76y^2 + 140y + 24$ (korrekt ordnen!)
	d) $(x-2)(x+9) = x^2 + 9x - 2x - 18 = x^2 + 7x - 18$
	e) $(4y-9)(6y+8) = 24y^2 + 32y - 54y - 72 = 24y^2 - 22y - 72 = 2(12y^2 - 11y - 36)$
	f) $(a+4)(a+8) = a^2 + 8a + 4a + 32 = a^2 + 12a + 32$
	g) $(-5s+3)(s-3) = -5s^2 + 15s + 3s - 9 = -5s^2 + 18s - 9$
	h) $(c+5)(c-2) = c^2 - 2c + 5c - 10 = c^2 + 3c - 10$
	2 a) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, weil $-1 \bullet -2 = +2$ und $-1 + -2 = -3$
	b) $x^2 - 14x + 49 = (x-7)(x-7)$, weil $-7 \bullet -7 = +49$ und $-7 + -7 = -14$
	c) $y^2 - y - 72 = (x-9)(x+8)$, weil $-9 \bullet +8 = -72$ und $-9 + 8 = -1$
	d) $2x^2 + 8x + 6 = 2(x^2 + 4x + 3) = 2(x+3)(x+1)$, weil $1 \bullet 3 = +3$ und $1 + 3 = +4$
	e) $b^2 + 3b - 28 = (b-4)(b+7)$, weil $-4 \bullet +7 = -28$ und $-4 + 7 = +3$
	f) $5x^2 + 35x - 90 = 5(x^2 + 7x - 18) = 5(x-2)(x+9)$, weil $-2 \bullet +9 = -18$ und $-2 + 9 = +7$
	g) $16x^2 - 32x + 15 = (4x-3)(4x-5)$, zuerst $-32:4=-8$ (wegen 4x in beiden Klammern), dann $-3 \bullet -5 = +15$ und $-3 + -5 = -8$
	h) $m^2 - 16m + 55 = (m-5)(m-11)$, weil $-5 \bullet -11 = +55$ und $-5 + -11 = -16$
	3 a) $\begin{array}{rcl} (x+5)(x-7) &= x(3+x) & \text{ umformen} \\ x^2 - 2x - 35 &= 3x + x^2 & -x^2 \\ -2x - 35 &= 3x & + 2x (\text{x isolieren, da lineare Gleichung!}) \\ -35 &= 5x & : 5 \\ -7 &= x &\textbf{x = -7} \end{array}$
	b) $\begin{array}{rcl} (x-2)(6x-17) &= (2x-1)(3x-13) & \text{ umformen} \\ 6x^2 - 29x + 34 &= 6x^2 - 29x + 13 & -6x^2 \\ -29x + 34 &= -29x + 13 & + 29x (\text{x isolieren, da lineare Gleichung!}) \\ 34 &= 13 & \text{ diese Aussage ist falsch} \\ &&\textbf{keine Lösung} \end{array}$
	c) $\begin{array}{rcl} (x+5)(x+5) - 18 &= (x-4)(x+7) & \\ x^2 + 10x + 25 - 18 &= x^2 + 3x - & \text{ umformen} \\ 28 && \text{ vereinfachen} \\ x^2 + 10x + 7 &= x^2 + 3x - 28 & -x^2 \\ 10x + 7 &= 3x - 28 & - 3x - 7 (\text{x isolieren, da lineare Gleichung!}) \\ 7x &= -35 & : 7 \\ x &= -5 &\textbf{x = -5} \end{array}$
	d) $\begin{array}{rcl} (x-5)(x-5) - 3(x+1) &= 10 & \text{ umformen} \\ x^2 - 10x + 25 - 3x - 3 &= 10 & \text{ vereinfachen} \\ x^2 - 13x + 22 &= 10 & -10 (\text{Quadr. Gleichung, darum eine Seite}=0 \text{ setzen}) \\ x^2 - 13x + 12 &= 0 & \text{ in Binom umschreiben} (\text{Produktform bei quadr. Gleich.}) \\ (x-12)(x-1) &= 0 & \text{ Fallunterscheidung} \\ \underline{\text{Fall 1: } x-12=0 \rightarrow x_1=12} && \textbf{x}_1 = 12 \\ \underline{\text{Fall 2: } x-1=0 \rightarrow x_2=1} && \textbf{x}_2 = 1 \end{array}$



Lösungen Mathematik 3 – Dossier 3 – Potenzen, Wurzeln und Binome

Seite 15 / 16 Binomische Formeln

	1	a) $(13 + y)^2 = 169 + 26y + y^2 = y^2 + 26y + 169$ (geordnet)	1. Binomische Formel
	b)	$(4d + 2)^2 = 16d^2 + 16d + 4$	1. Binomische Formel
	c)	$(5a - 4c)^2 = 25a^2 - 40ac + 16c^2$	2. Binomische Formel
	d)	$(5d+6c)(5d - 6c) = 25d^2 - 36c^2 = -36c^2 + 25d^2$ (geordnet)	3. Binomische Formel
	e)	$(14x - 13y)(14x - 13y) = 196x^2 - 364xy + 169y^2$	2. Binomische Formel
	f)	$(a\sqrt{8} - x\sqrt{2})^2 = 8a^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + 2x^2$ $= 8a^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot \sqrt{16} + 2x^2$ $= 8a^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot 4 + 2x^2$ $= 8a^2 - 8ax + 2x^2 = 2(4a^2 - 4ax + x^2) = 2(2a - x)^2$	2. Binomische Formel
	g)	$(5s + 3)^2 = 25s^2 + 30s + 9$	1. Binomische Formel
	h)	$(3a - 4c)^2 = 9a^2 - 24ac + 16c^2$	2. Binomische Formel
	i)	$(5d + 2)^2 = 25d^2 + 20d + 4$	1. Binomische Formel
	k)	$(4h + 5i)(5i - 4h) = (5i + 4h)(5i - 4h) = 25i^2 - 16h^2 = -16h^2 + 25i^2$	3. Binomische Formel
	2	a) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$	2. Binomische Formel
	b)	$p^2 - 2pv + v^2 = (p - v)^2$	2. Binomische Formel
	c)	$16r^2 - 8r + 1 = (4r - 1)^2$	2. Binomische Formel
	d)	$9u^2 + 30u + 25 = (3u + 5)^2$	1. Binomische Formel
	e)	$q^2 - 0,5q - 0,36 = (q - 0,9)(q + 0,4)$, weil $-0,9 \cdot 0,4 = 0,36$ und $-0,9 + 0,4 = -0,5$	keine Binomische Formel
	f)	$144x^2 - 225 = (12x - 15)(12x + 15)$	3. Binomische Formel
	g)	$196s^2 - 289 = (14s - 17)(14s + 17)$	3. Binomische Formel
	h)	$64a^2b^2 - 9c^2 = (8ab - 3c)(8ab + 3c)$	3. Binomische Formel
	i)	$9p^2 + 6p + 1 = (3p + 1)^2$	1. Binomische Formel
	k)	$49x^2 - 28x + 4 = (7x - 2)^2$	2. Binomische Formel
	3	a) $(x - 5)^2 - (3 - 5x) = 16$ $x^2 - 10x + 25 - 3 + 5x = 16$ $x^2 - 5x + 22 = 16$ $x^2 - 5x + 6 = 0$ $(x - 2)(x - 3) = 0$ <u>1. Fall:</u> $x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$ <u>2. Fall:</u> $x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$	umformen vereinfachen -16 (Quadratische Gleichung, darum eine Seite = 0 setzen) in Binom umschreiben (Produktform bei quadr. Gleichung) Fallunterscheidung $x_1 = 2$ $x_2 = 3$
	b)	$(x - 4)(x + 4) = (2 - x)(x - 8)$ $x^2 - 16 = 2x - 16 - x^2 + 8x$ $x^2 - 16 = -x^2 + 10x - 16$ $2x^2 - 16 = 10x - 16$ $2x^2 - 10x = 0$ $2x(x - 5) = 0$ <u>1. Fall:</u> $2x = 0 \rightarrow x_1 = 0$ <u>2. Fall:</u> $x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = 5$	umformen vereinfachen +x ² -10x + 16 (Quadr.Gleichung, darum eine Seite = 0 setzen) ausklammern (Produktform bei quadr. Gleichung) Fallunterscheidung $x_1 = 0$ $x_2 = 5$
	c)	$y^2 - 2(y + 4)^2 = (y - 1)^2 - 3y(y + 2)$ $y^2 - 2(y^2 + 8y + 16) = y^2 - 2y + 1 - 3y^2 - 6y$ $y^2 - 2y^2 - 16y - 32 = -2y^2 - 8y + 1$ $-y^2 - 16y - 32 = -2y^2 - 8y + 1$ $y^2 - 8y - 33 = 0$ $(y - 11)(y + 3) = 0$ <u>1. Fall:</u> $y - 11 = 0 \rightarrow y_1 = 11$ <u>2. Fall:</u> $y + 3 = 0 \rightarrow y_2 = -3$	umformen vereinfachen vereinfachen +2y ² + 8y - 1 (Quadr.Gleichung, darum eine Seite = 0 setzen) in Binom umschreiben (Produktform bei quadr. Gleichung) Fallunterscheidung $x_1 = 11$ $x_2 = -3$



Lösungen Mathematik 3 – Dossier 3 – Potenzen, Wurzeln und Binome

Seiten 16 / 17 Binomische Formeln

	d) $18x = x^2 + 81$ $0 = x^2 - 18x + 81$ $0 = (x - 9)^2$ <u>1. Fall:</u> $x - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 9$ <u>2. Fall:</u> $x - 9 = 0 \rightarrow x_2 = 9$	-18x (Quadratische Gleichung, darum eine Seite = 0 setzen) in Binom umschreiben (Produktform bei quadr. Gleichung) Fallunterscheidung (hier fallen beide Fälle zusammen)
	e) $x^2 + 11x + 18 = 0$ $(x + 9)(x + 2) = 0$ <u>1. Fall:</u> $x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = -9$ <u>2. Fall:</u> $x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$	in Binom umschreiben (Produktform bei quadr. Gleichung) Fallunterscheidung (hier fallen beide Fälle zusammen) $x_1 = -9$ $x_2 = -2$
	f) $(2x - 4)(x + 6) = (x + 7)^2 - 57$ $2x^2 + 8x - 24 = x^2 + 14x + 49 - 57$ $2x^2 + 8x - 24 = x^2 + 14x - 8$ $x^2 - 6x - 16 = 0$ $(x + 2)(x - 8) = 0$ <u>1. Fall:</u> $x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -2$ <u>2. Fall:</u> $x - 8 = 0 \rightarrow x_2 = 8$	umformen vereinfachen $-x^2 - 14x + 8$ (Quadr.Gleichung, darum eine Seite = 0 setzen) in Binom umschreiben (Produktform bei quadr. Gleichung) Fallunterscheidung $x_1 = -2$ $x_2 = 8$
	g) $2(y + 1)(y - 7) = 3(3 - y)^2 - (2y)^2 + 31$ $2(y^2 - 6y - 7) = 3(9 - 6y + y^2) - 4y^2 + 31$ $2y^2 - 12y - 14 = 27 - 18y + 3y^2 - 4y^2 + 31$ $2y^2 - 12y - 14 = -y^2 - 18y + 58$ $3y^2 + 6y - 72 = 0$ $3(y^2 + 2y - 24) = 0$ $3(y + 6)(y - 4) = 0$ <u>1. Fall:</u> $y + 6 = 0 \rightarrow y_1 = -6$ <u>2. Fall:</u> $y - 4 = 0 \rightarrow y_2 = +4$	umformen vereinfachen vereinfachen $+y^2 + 18y - 58$ (Quadr.Gleichung, darum eine Seite = 0 setzen) ausklammern in Binom umschreiben (Produktform bei quadr. Gleichungen) Fallunterscheidung $x_1 = -6$ $x_2 = 4$
	h) $(x - 5)^2 - 3(x + 1) = 10$ $x^2 - 10x + 25 - 3x - 3 = 10$ $x^2 - 13x + 22 = 10$ $x^2 - 13x + 12 = 0$ $(x - 12)(x - 1) = 0$ <u>1. Fall:</u> $x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = 12$ <u>2. Fall:</u> $x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1$	umformen vereinfachen -10 (Quadr.Gleichung, darum eine Seite = 0 setzen) in Binom umschreiben (Produktform bei quadr. Gleichung) Fallunterscheidung $x_1 = 12$ $x_2 = 1$
	i) $(3y - 2)(3y + 2) + 38y = (5y + 3)(y + 7)$ $9y^2 - 4 + 38y = 5y^2 + 38y + 21$ $4y^2 - 25 = 0$ $(2y - 5)(2y + 5) = 0$ <u>1. Fall:</u> $2y - 5 = 0 \rightarrow 2y = 5 \rightarrow y_1 = \frac{5}{2}$ <u>2. Fall:</u> $2y + 5 = 0 \rightarrow 2y = -5 \rightarrow y_2 = -\frac{5}{2}$	umformen $-5y - 38y - 21$ (Quadr.Gleichung, darum eine Seite = 0 setzen) in Binom umschreiben (Produktform bei quadr. Gleichung) Fallunterscheidung $x_1 = -\frac{5}{2} = -2.5$ $x_2 = \frac{5}{2} = 2.5$
4	a) Zahl : x vergrösserte Zahl : $x + 11$ <u>Gleichung</u> $(x+11)^2 - 913 = x^2$ $x^2 + 22x + 121 - 913 = x^2$ $x^2 + 22x - 792 = x^2$ $22x - 792 = 0$ $22x = 792$ $x = 36$	<i>IST - Zustand</i> <i>Veränderter Zustand (vergrößert man eine Zahl um 11)</i> <i>Gleichung aufstellen:</i> Quadrat neue Zahl ist um 913 grösser als Quadrat alte Zahl. umformen vereinfachen $-x^2$ $+ 792$ (lineare Gleichung, also x isolieren) : 22 $x = 36$
	neue Zahl = $x + 11 = 36 + 11 = 47$	Die Zahlen heissen 36 und 47.



Lösungen Mathematik 3 – Dossier 3 – Potenzen, Wurzeln und Binome

Seite 17 Binomische Formeln	<p>b) Zahl 1 : x <i>IST - Zustand</i> Zahl 2 : $45 - x$ (weil Summe = 45)</p> <p>Zahl 1 neu : $x - 13$ <i>Veränderter Zustand (verkleinert man beide um 13)</i> Zahl 2 neu : $45 - x - 13 = 32 - x$</p> <p><u>Gleichung</u> $(x - 13)^2 - (32 - x)^2 = 133$ $x^2 - 26x + 169 - 1024 + 64x - x^2 = 133$ $38x - 855 = 133$ $38x = 988$ $x = 26$ </p> <p><i>Gleichung aufstellen:</i> ..ist die Differenz der Quadrate gleich 133 umformen vereinfachen + 855 (lineare Gleichung, also x isolieren) : 38 $x = 26$</p> <p>zweite Zahl = $45 - x = 45 - 26 = 19$ Die Zahlen heissen 19 und 26.</p>
Seite 18 Kürzen von Bruchtermen	<p>1 a) $\frac{(14x^2y + 35xy^2)}{21xy} = \frac{7xy(2x + 5y)}{21xy} = \frac{2x + 5y}{3}$</p> <p>b) $\frac{(a^2 - 9)}{a^2 + 3a} = \frac{(a + 3)(a - 3)}{a(a + 3)} = \frac{a - 3}{a}$</p> <p>c) $\frac{y^2 - 11y + 30}{2y^2 - 6y - 36} = \frac{(y - 6)(y - 5)}{2(y^2 - 3y - 18)} = \frac{(y - 6)(y - 5)}{2(y - 6)(y + 3)} = \frac{y - 5}{2(y + 3)}$</p> <p>d) $\frac{18 - 3x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{3(6 - x)}{(x - 6)^2} = \frac{-3(-6 + x)}{(x - 6)^2} = \frac{-3(x - 6)}{(x - 6)^2} = \frac{-3}{x - 6}$ (<i>Trick: $(6-x) = -(-6+x)$, also (-1) ausklammern</i>)</p> <p>e) $\frac{36 - y^2}{3y^2 + 36y + 108} = \frac{(6 - y)(6 + y)}{3(y^2 + 12y + 36)} = \frac{(6 - y)(6 + y)}{3(y + 6)^2} = \frac{6 - y}{3(y + 6)}$</p> <p>f) $\frac{4a^2 - 20ab + 25b^2}{2ac - 5bc} = \frac{(2a - 5b)^2}{c(2a - 5b)} = \frac{2a - 5b}{c}$</p>