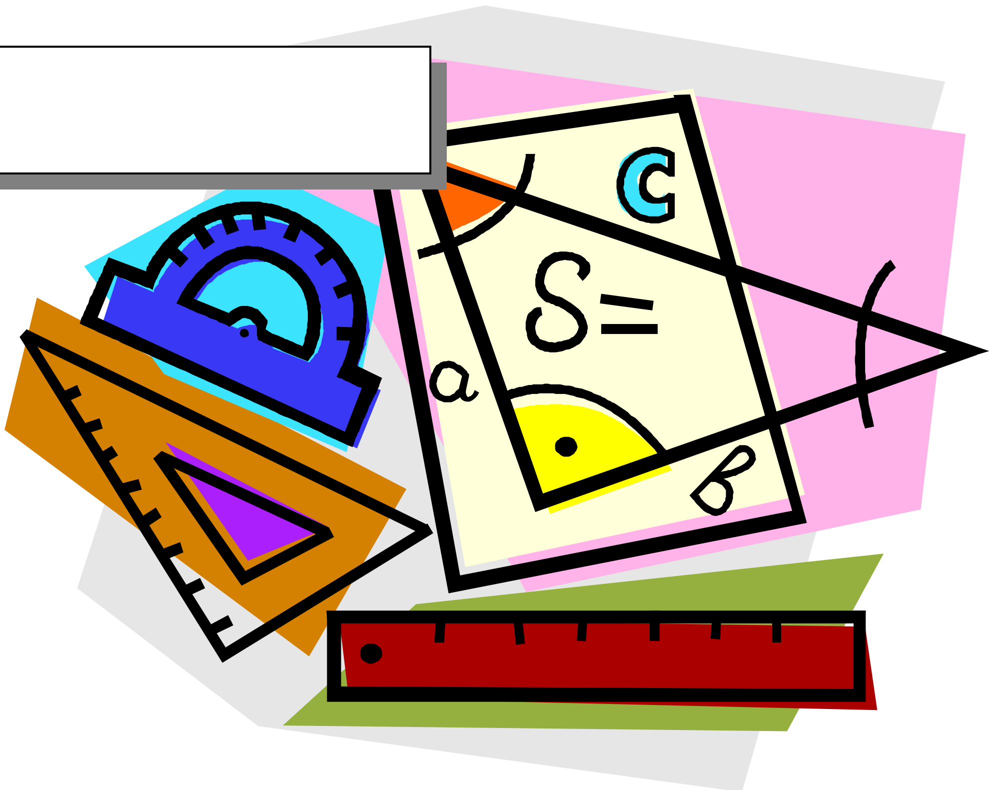
Geometrie-Dossier
Die Zentrische Streckung

Name:

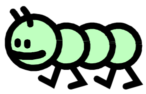


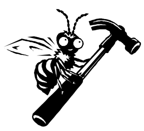
Inhalt:

- **Bekannte Abbildungen und ihre Eigenschaften**
- **Zentrische Streckung**
- **Konstruktionstipps für Zentrische Streckung**
- **Aufgaben aller Art zur Zentrischen Streckung**

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*
	Sichtbarkeit:	*In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.*

1. Bekannte Abbildungen und ihre Eigenschaften

Die besondere Leistung von Abbildungen ist es ja bekanntlich, eine Originalfigur in eine Bildfigur zu überführen. Dies natürlich nach gewissen Regeln. Wir kennen mittlerweile verschiedene Abbildungen, die eine solche Überführung leisten, nämlich:

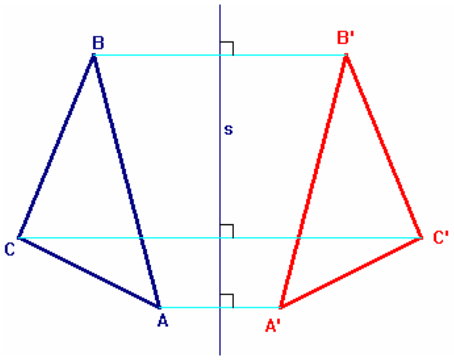
- Geradenspiegelung
- Drehung (Drehspiegelung)
- Punktspiegelung

Jede dieser Abbildungen hat eigene Gesetzmässigkeiten, doch ihnen allen sind gewisse Eigenschaften gemeinsam, denn alle drei Abbildungen sind

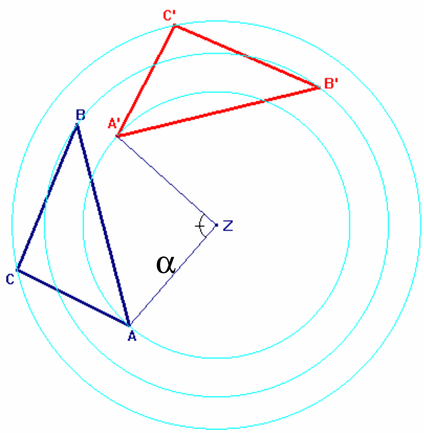
- winkeltreu (Winkel werden in gleich grosse Winkel abgebildet, also „winkelerhaltend“)
- geradentreu (Geraden werden in Geraden abgebildet, also nicht verkrümmt)
- längentreu (Strecken werden in gleich lange Strecken abgebildet, also nicht verlängert, nicht verkürzt)

Zudem besitzen die Abbildungen alle auch Fixpunkte (das sind Punkte, die auf sich selber abgebildet werden, also an Ort bleiben):

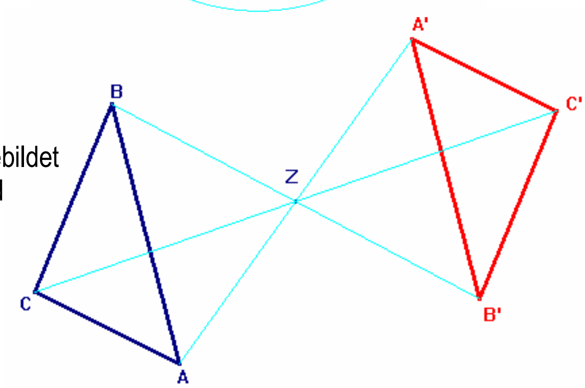
- **Geradenspiegelung:**
  - Die Symmetrieachse s ist Fixgerade
  - winkeltreu
  - geradentreu
  - längentreu
  - Original und Bild schneiden sich auf s



- **Drehung:**
  - Der Drehpunkt Z ist Fixpunkt
  - winkeltreu
  - längentreu
  - geradentreu
  - Original, Drehpunkt und Bild beschreiben den Drehwinkel α.



- **Punktspiegelung**:
  - Das Symmetriezentrum Z ist Fixpunkt.
  - geradentreu
  - längentreu
  - winkeltreu
  - Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet
  - Alle Verbindungen von Original und Bild gehen durch Z.

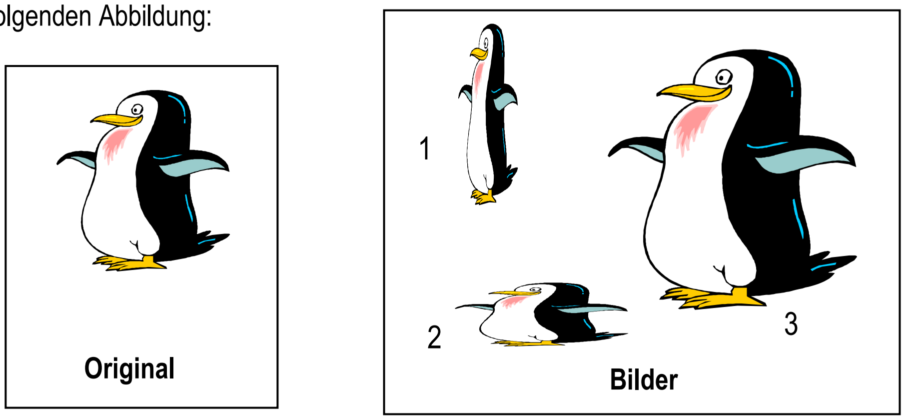


Und jetzt lernen wir eine neue Abbildung kennen. Welche Eigenschaften mag sie haben? Wir versuchen uns, ihr zu nähern.

2. Die Zentrische Streckung

2.1 Einleitung

Aus der Mathematik kennen wir die Proportionalität. Dort geht es ja bekanntlich um Verhältnisse. Ganz genau wie in der folgenden Abbildung:

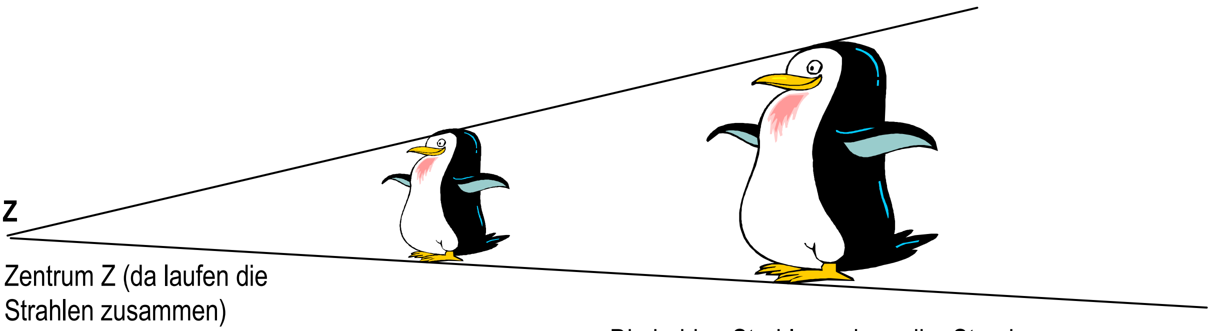


Hier ist natürlich nur Bild 3 korrekt ergrössert (also proportional oder verhältnisgleich zum Original).

Geometrisch bezeichnet man eine solche proportionale Vergrösserung (oder Verkleinerung) als „zentrische Streckung“

Schauen wir uns den Begriff „Zentrische Streckung“ genauer an. Er besteht aus zwei Teilen, nämlich **„Zentrisch“,** also irgendwie **auf ein Zentrum bezogen** und dem Begriff **„Streckung“**, also etwas **„in die Länge ziehen“** – bzw. „Zusammenstossen“.

Im Detail sieht das so aus (ganz ähnlich dem Fluchtpunkt bei perspektivischem Zeichnen):



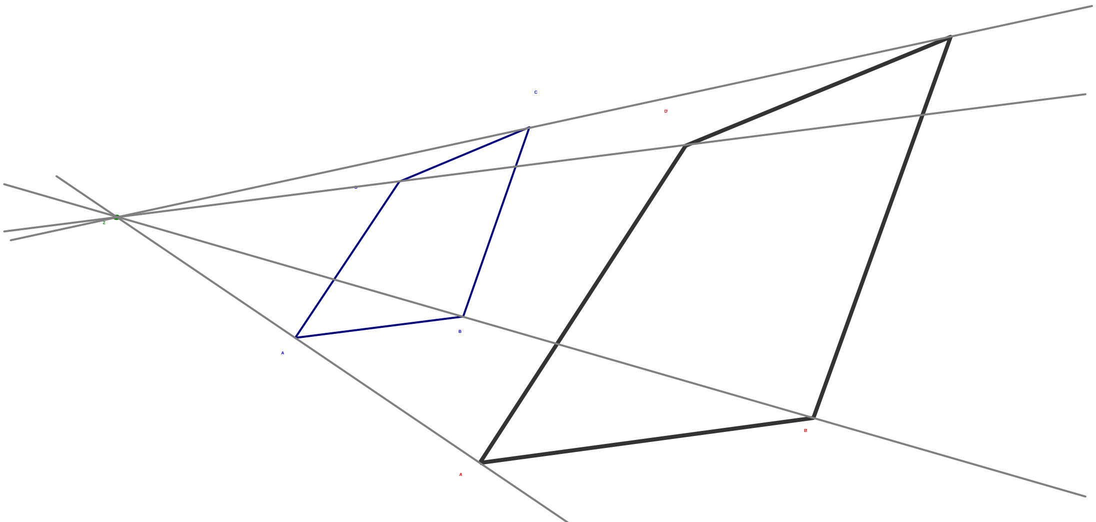
Zentrum Z (da laufen die Strahlen zusammen)

Die beiden Strahlen zeigen die „Streckungswege (die Bahnen, in denen die Figur sich bewegen muss)

Zentrische Streckung kommt vielfach vor, so zum Beispiel beim Modellbau, beim Arbeiten mit Computer (Skalieren von Bildern), sogar bei geometrischen Konstruktionen und in Alltagsproblemen. Die Abbildung ist eine allgemeine Abbildung, die die uns bisher bekannte Punktspiegelung als Sonderfall einschliesst.

2.2 Die Abbildung und ihre Vorschriften

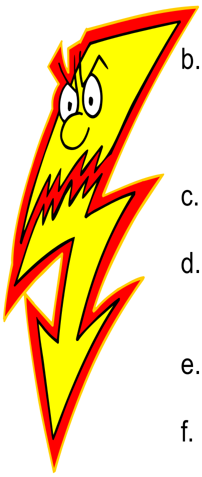
Die zentrische Streckung präsentiert sich hier musterhaft als Vergrösserung eines allgemeinen Vierecks ABCD.



Punkt Z:	**Streckzentrum**
Viereck ABCD:	**Originalfigur**
Viereck A'B'C'D'	**Bildfigur**
Streckfaktor k:	**Bezeichnet den Proportionalitätsfaktor (Verhältniswert) von Bildstrecke zu Orginialstrecke.** *In diesem Beispiel ist k = 2* *(Das bedeutet, dass jede Bildstrecke doppelt so lang ist wie ihr Original)*

Mit diesen Elementen ist die zentrische Streckung definiert. Aus dem obigen Bild lassen sich auch die Abbildungsvorschriften leicht herauslesen:

Abbildungsvorschriften:



a. Jeder Punkt P und sein Bildpunkt P' liegen auf einer Geraden, die durch das Streckzentrum Z geht.
(Die Verbindung von Originalpunkt und Bildpunkt geht durch das Streckzentrum)

b. Der Abstand des Bildpunktes P' von Z wird durch den Betrag des Streckfaktores k bestimmt.
Es gilt: $\overline{P'Z} = |k| \bullet \overline{PZ}$
(Der Abstand des Bildpunktes von Z ist k mal länger als der Abstand des Originalpunktes zu Z)

c. Das Bild einer Geraden g ist eine parallele Gerade g'.

d. Die Länge der Bildstrecke wird durch die Länge der Originalstrecke und den Streckfaktor k bestimmt.
(Die Bildstrecke ist k mal länger als die Originalstrecke)

e. In zentrisch gestreckten Figuren bleiben alle Winkel erhalten.

f. Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, dann liegt sein Bildpunkt P' auf der Bildgeraden g'

g. Die durch zentrische Streckung erzeugten Figuren sind zueinander ähnlich (formgleich, proportional)

h. Alle Kreise sind zueinander ähnlich. Alle Quadrate sind zueinander ähnlich. Alle gleichseitigen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

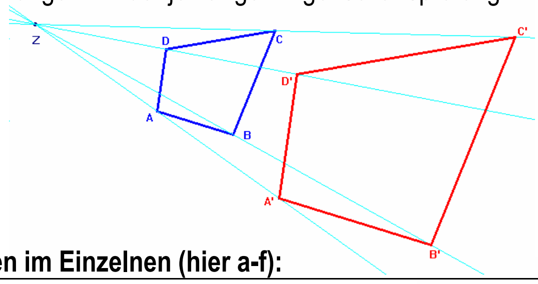
Der Streckfaktor entspricht dem Proportionalitätsfaktor (Verhältniswert). Es gilt:

$$\text{Streckfaktor } k = \frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}} = \frac{\text{Entfernung vom Streckzentrum zum Bildpunkt}}{\text{Entfernung vom Streckzentrum zum Originalpunkt}} = \text{konstant}$$

Wir wollen diese Abbildungsvorschriften anhand eines Musters einzeln nachprüfen und untersuchen. Damit du auch verstehen und nachvollziehen kannst, wie man zu diesen Behauptungen kommt:

2.3 Untersuchen einer zentrisch gestreckten Figur auf die Abbildungsvorschriften:

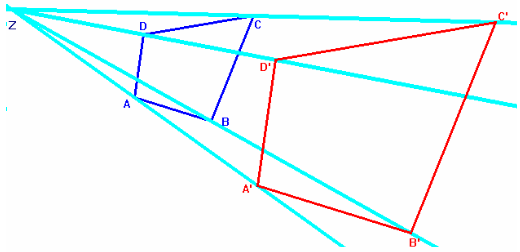
So sieht die Figur als Ganzes aus. Das Viereck ABCD wurde mit Streckfaktor k=2 gestreckt. Untenstehend finden wir (z.T. verkleinerte) Darstellungen mit der jeweiligen Eigenschaftsprüfung.



Die Abbildungsvorschriften im Einzelnen (hier a-f):

a Jeder Punkt P und sein Bildpunkt P' liegen auf einer Geraden, die durch das Streckzentrum Z geht. (*Die Verbindung von Originalpunkt und Bildpunkt geht durch das Streckzentrum)*

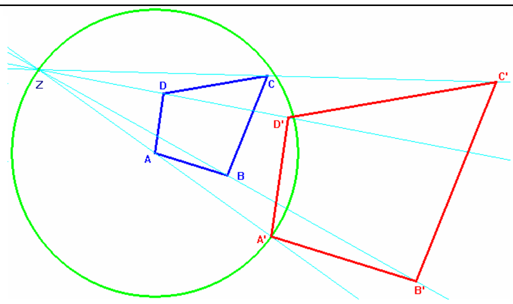
➔ Dies ist klar zu sehen:
Die Geraden AA' , BB', CC' und DD' gehen alle durch Z



✓

b *Der Abstand des Bildpunktes P' von Z wird durch den Betrag des Streckfaktores k bestimmt.*
Es gilt: $\overline{P'Z} = |k| \bullet \overline{PZ}$

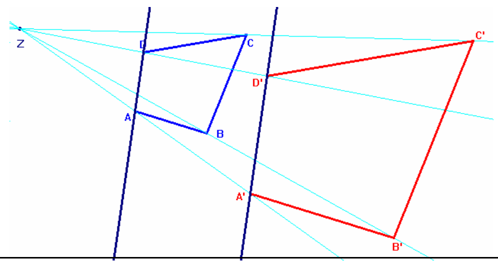
➔ Die Strecke A'Z ist genau doppelt so lang wie die Strecke AZ. Im Beispiel wird dies mit dem Kreis um A gezeigt. Der Streckfaktor in diesem Fall ist 2.



✓

c *Das Bild einer Geraden g ist eine parallele Gerade g'.*

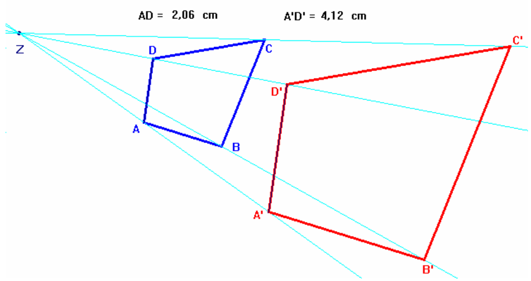
➔ Eindeutig zu sehen: AD ist parallel zu A'D', AB ist parallel zu A'B', AC ist parallel zu A'C' usw.



✓

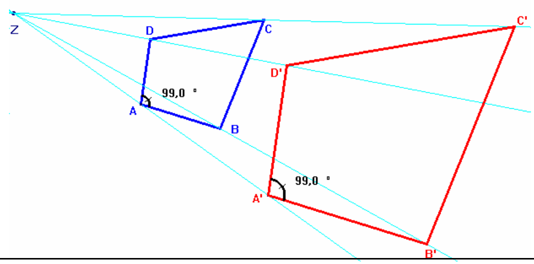
d *Die Länge der Bildstrecke wird durch die Länge der Originalstrecke und den Streckfaktor k bestimmt. (Die Bildstrecke ist k mal länger als die Originalstrecke)*

➔ Vor dem Verkleinern der Figur gemessen:
AD = 2.06cm, A'D' = 4.12 cm = 2• 2.06 = k • AD.



✓

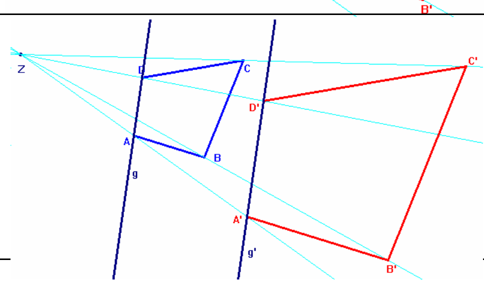
e *In zentrisch gestreckten Figuren bleiben alle Winkel erhalten.*
Als Beispiel ist der markierte Winkel α



✓

f *Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, dann liegt sein Bildpunkt P' auf der Bildgeraden g'*

➔ A liegt auf der Geraden g, A' liegt auf g'. Dies gilt auch für alle anderen Punkte und ihr Bild.



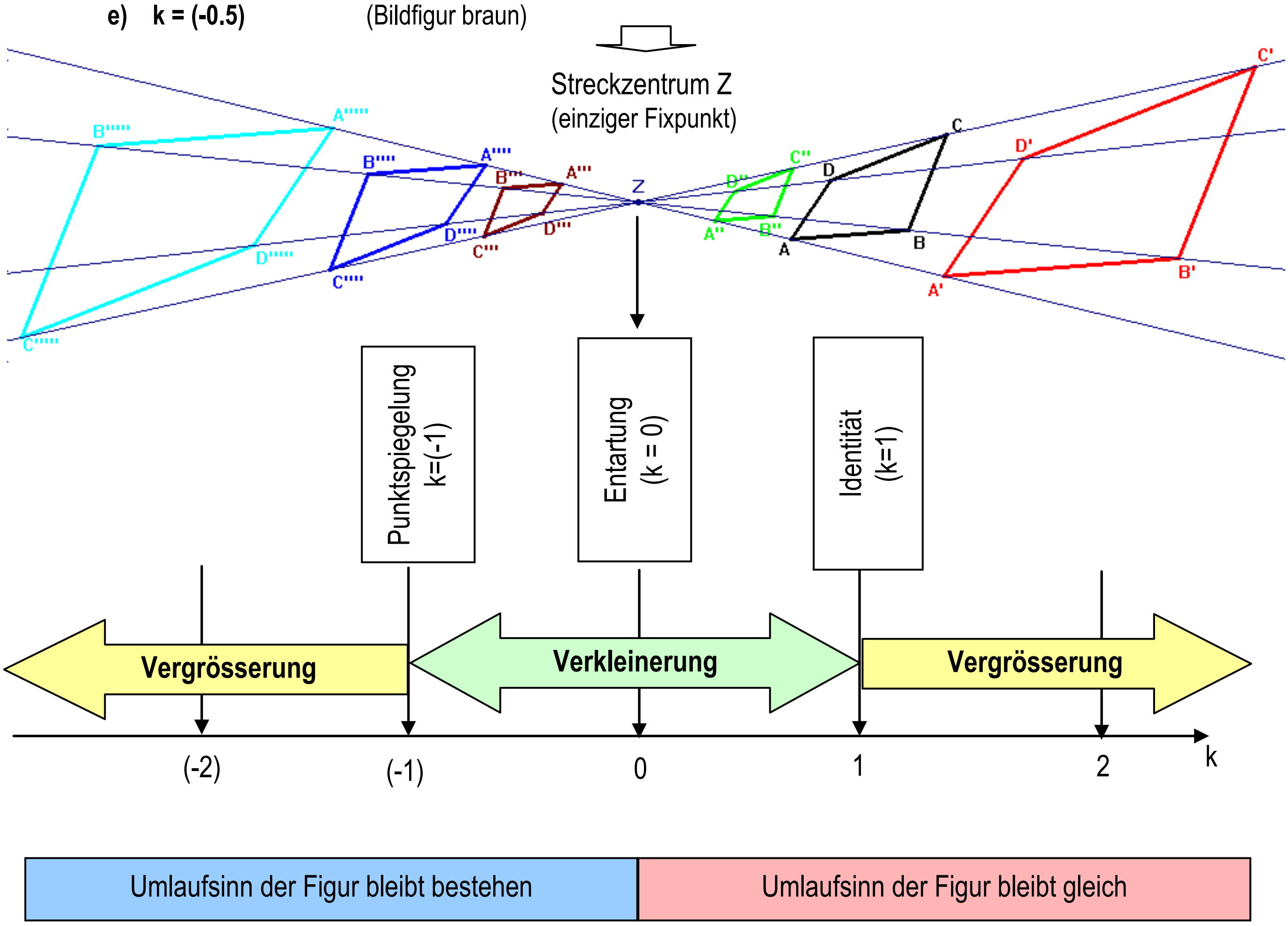
✓

2.4 Der Einfluss des Streckfaktors

Aus den Abbildungsvorschriften kann man die Bedeutung des Streckfaktores herauslesen. Er bestimmt, welche Grösse die Bildfigur erhält, er bestimmt auch, wo sie zu liegen kommt. Somit müssen wir diesen Streckfaktor speziell betrachten.

Ein Viereck ABC (Originalfigur, schwarz) wurde mit den folgenden Streckfaktoren abgebildet:

a) **k = 2** (Bildfigur rot)
b) **k = 0.5** (Bildfigur grün)
c) **k = (-1)** (Bildfigur blau)
d) **k = (-2)** (Bildfigur hellblau)
e) **k = (-0.5)** (Bildfigur braun)



Wir können also feststellen, dass für verschiedene Streckfaktoren k verschiedene Bilder entstehen. Dies mit den oben angezeichneten Gesetzmässigkeiten:

k > 1:	Vergrösserung der Originalfigur Umlaufsinn bleibt erhalten
k= 1	Identität (Figur wird auf sich selber abgebildet)
(-1) < k< 1	Verkleinerung der Originalfigur
k = 0	Entartung (Figur wird auf einen Punkt abgebildet)
k = (-1)	Punktspiegelung der Figur am Streckzentrum Z
k < (-1)	Vergrösserung der Originalfigur Umlaufsinn bleibt erhalten.
k > 0	Umlaufsinn bleibt erhalten.
k < 0	Umlaufsinn bleibt erhalten.

3. Konstruktionstipps zur Zentrischen Streckung (Grundaufgaben)

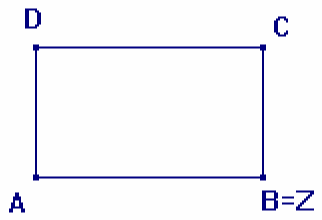
Nicht alle Aufgaben sind so ganz einfach mit gegebenem Streckzentrum, Streckfaktor und Originalfigur zu lösen. Wichtig ist es, die Abbildungsvorschriften zu kennen. Damit lässt sich alles lösen. Untenstehend finden sich typische Grundaufgaben und ihre Lösungsidee zur Anwendung der zentrischen Streckung.

3.1 Grundaufgabe 1 (mit der Eigenschaft „Die Verbindung von Original- und Bildpunkt geht durch Z)

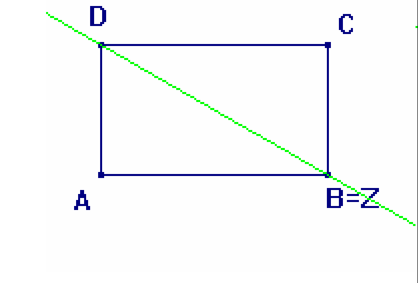
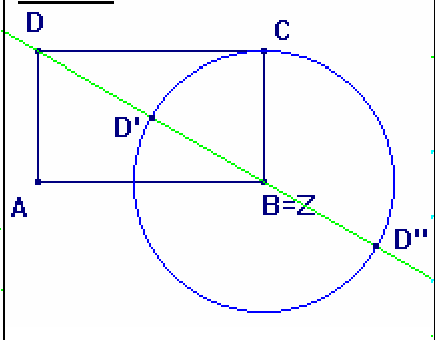
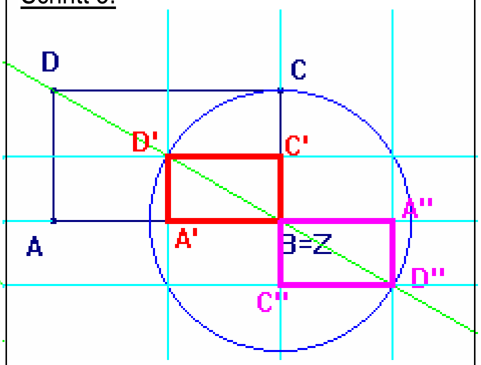
Dies ist die eigentliche Standard-Grundaufgabe. Sie existiert in verschiedenen Versionen. Wir betrachten zwei davon.

<u>**Typ 1 – A:**</u>

Bilde die gegebene Figur durch eine zentrische Streckung ab.

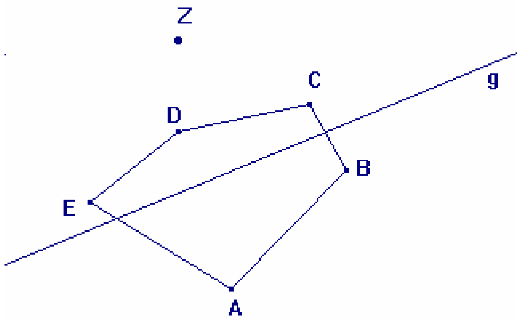


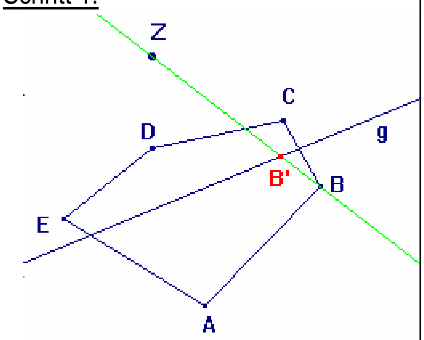
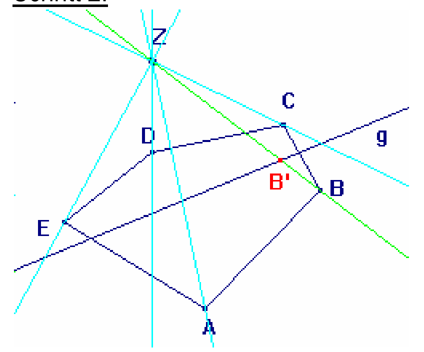
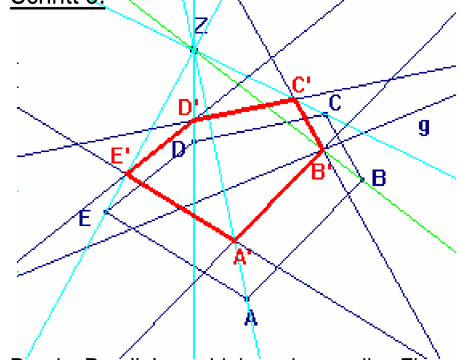
$\overline{B'D'} = \overline{BC}$

Schritt 1:	Schritt 2:	Schritt 3:
		
<u>Da D' zwingend auf der Verbindung von D mit Z liegen muss</u>, zeichnen wir diese Verbindung ein. Dabei gilt natürlich auch B = Z = B', weil Z ja Fixpunkt ist.	Da BC und B'D' gleich lang sind, kann man diese Entfernung mit dem Zirkel abtragen (Achtung, zwei mögliche Lösungen) <u>(Schnittpunkte des Kreises mit der Verbindung DZ)</u>	Durch Parallelverschieben kann die Figur noch vervollständigt werden (denn Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet)

<u>**Typ 1 – B:**</u>

Konstruiere das Bild dieser Figur aufgrund einer zentrischen Streckung mit Zentrum Z, so dass B' auf g zu liegen kommt.

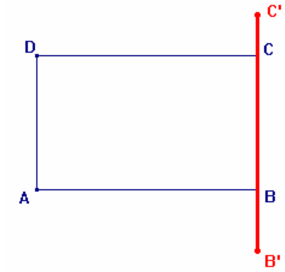


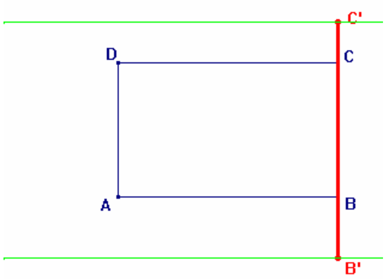
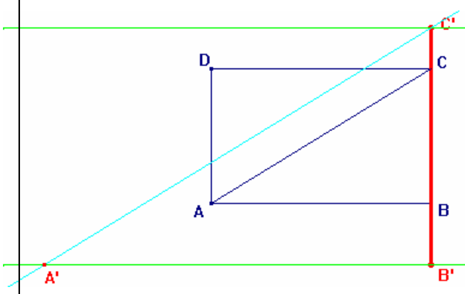
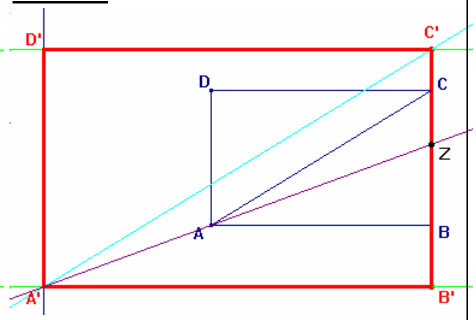
Schritt 1:	Schritt 2:	Schritt 3:
		
B' muss auf der Verbindung von B mit Z liegen. Zudem muss es auf g liegen (Aufgabenstellung). Somit finden wir B'.	Für jeden weitern Eckpunkt gilt das Gleiche: Er liegt auf der Verbindung von Z und Originalpunkt.	Durch Parallelverschieben kann die Figur noch vervollständigt werden. (Jeweils Schnittpunkte der Parallelen mit der Verbindung durch Z)

3.2 Grundaufgabe 2 (mit der Eigenschaft „Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet“)

Typ 2 – A:

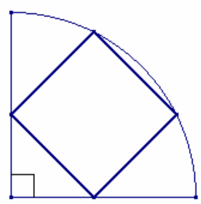
Gegeben ist ein Viereck. Eine Seite der zugehörigen Bildfigur, entstanden durch zentrische Streckung ist farbig ausgezogen. Vervollständige die Bildfigur und gib das Streckzentrum Z an.



Schritt 1:	Schritt 2:	Schritt 3:
		
Da alle Originalgeraden auf parallele Bildgeraden abgebildet werden, können wir die entsprechenden Parallelen zeichnen (AB parallel durch den Punkt B', CD parallel durch den Punkt C')	Damit wir jetzt einen weiteren Bildpunkt finden (z.B. A') verwenden wir die gleiche Überlegung noch einmal. Die Strecke AC (einzeichnen!) wird auf die Parallele A'C' abgebildet. Somit finden wir A' als Schnittpunkt der zwei Parallelen.	Durch Parallelverschieben von AD finden wir jetzt noch D'. Das Streckzentrum kann einfach konstruiert werden. Es liegt mit Sicherheit auf C'C (rsp. B'B) wenn wir jetzt noch AA' verbinden ist der entsprechende Schnittpunkt das Streckzentrum Z. (Z liegt auf der Verbindung von Original- und Bildpunkt)

3.3 Grundaufgabe 3 (Einschreiben von Figuren in gegebene Figuren, Streckenverhältnisse zeichnen)

Diese Aufgabe ist wohl die schwierigste dieser Serie. Denn hier ist die zentrische Streckung nur ein Hilfsmittel, das man gezielt einsetzen muss. Übrigens: Einschreiben bedeutet, dass jeder Eckpunkt der eingeschriebenen Figur auf einer Strecke / Kreisbogen der umschriebenen Figur liegt.



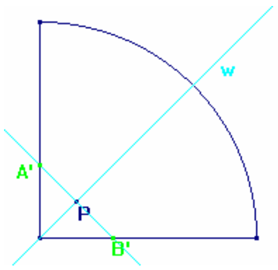
Typ 3 – A:

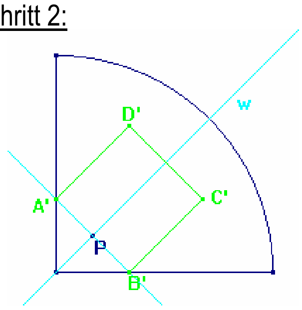
Schreibe dem Viertelkreis ein Quadrat ein (gemäss nebenstehender Abbildung).

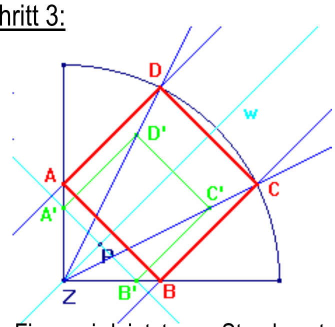
Wir müssen jetzt die verlangten Bedingungen einmal genauer anschauen:

1. Wir müssen ein Quadrat zeichnen (Form der eingeschriebenen Figur)
2. Je eine Ecke muss auf einem Kreisradius liegen (hier A und B)
3. Die beiden anderen Ecken liegen auf dem Kreisbogen.

Die Idee zum Lösen: Nicht alle Bedingungen gleichzeitig erfüllen, wir beschränken uns zuerst auf zwei Bedingungen (1 und 2).

<table>
<tr>
<td>
<u>Schritt 1:</u>


Wir beginnen mit dem Viertelkreis. Damit diesem ein Quadrat überhaupt eingeschrieben werden kann, muss dieses Quadrat so liegen, dass zwei seiner Seiten senkrecht zur Winkelhalbierenden des Viertelkreises liegen (anders geht's nicht).
Wir zeichnen also die Winkelhalbierende und danach wählen wir einen <u>beliebigen</u> <u>Punkt P,</u> durch welchen wir die Senkrechte zu w zeichnen. Die beiden Schnittpunkte nennen wir A' und B'.
</td>
<td>
<u>Schritt 2:</u>


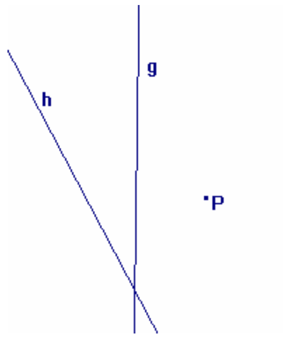
Jetzt zeichnen wir das Quadrat fertig, welches die beiden Bedingungen 1 und 2 erfüllt. (Es ist ein Quadrat und zwei Eckpunkte liegen auf den Viertelkreisradien.)
➔ <u>Es ist eine Hilfsfigur.</u>
Die Hilfsfigur ist jetzt noch zu klein, man kann sie aber (zentrisch) strecken. (Zentrum Z: Schnittpunkt der Kreisradien)
</td>
<td>
<u>Schritt 3:</u>


Die Figur wird jetzt am Streckzentrum Z gestreckt. Dabei wandern A' und B' auf den Kreisradien, die Punkte C' und D' bis auf den Kreisbogen.
Und schon sind wir fertig.
Noch einmal das Vorgehen:

Hilfsfigur zeichnen (ihre Grösse ist frei wählbar). Die Hilfsfigur erfüllt schon zwei von drei Bedingungen.
Hilfsfigur strecken

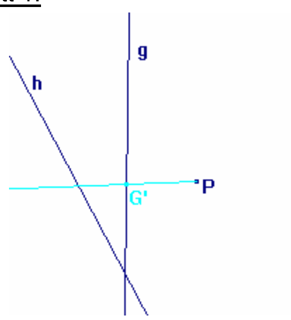
</td>
</tr>
</table>

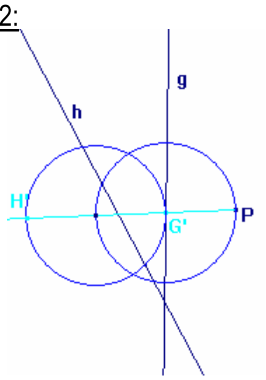
<u>Typ 3 – B:</u>
Lege durch den Punkt P eine Gerade, die die Gerade g in G und die Gerade h in H schneidet. Dabei soll PH dreimal so lang sein wie PG..

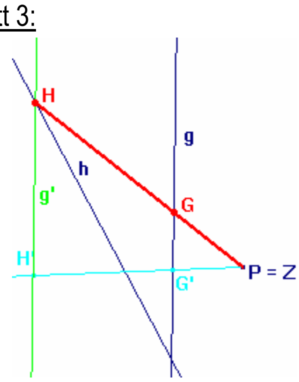


Auch hier schauen wir die verlangten Bedingungen einmal genauer an:
1. Die Gerade g muss in G geschnitten werden
2. PH ist dreimal so lang wie PG
3. Der Punkt H muss auf der Geraden h liegen.

Die Idee zum Lösen: Nicht alle Bedingungen gleichzeitig erfüllen, wir beschränken uns zuerst auf zwei Bedingungen (1 und 2).

<table>
<tr>
<td>
<u>Schritt 1:</u>


Wieder wählen wir also zuerst die Bedingung 1, also eine Gerade durch P, welche g in G schneidet. So finden wir den Punkt G'
</td>
<td>
<u>Schritt 2:</u>


Jetzt tragen wir PG' noch zweimal von G' aus ab. Dort finden wir H'. (PH' ist dreimal so lang wie PG')
</td>
<td>
<u>Schritt 3:</u>


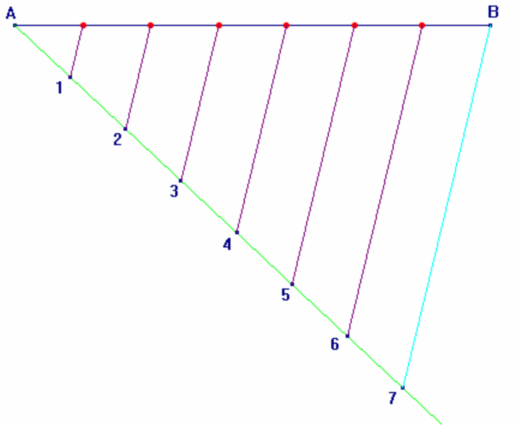
Wenn wir uns jetzt den Punkt H' als zentrisch gestrecktes Bild von G' vorstellen (wegen dem dreimal so lang geht das gut), verwenden wir die Regel: Liegt ein Originalpunkt auf der Geraden g, liegt ihr Bildpunkt auf der parallelen Geraden g'. Das bedeutet, wir brauchen die Parallele von g durch H'. Der Schnittpunkt mit h ist der Punkt H. Dann finden wir noch G (PH ∩ g) und sind fertig.
</td>
</tr>
</table>

4. Streckenteilung – Eine Anwendung der zentrischen Streckung.

Strecken jeder Länge nur mit Massstab, Zirkel und Geo-Dreieck, aber ohne irgendwie zur rechnen, zu teilen, ist nicht ganz einfach. Dennoch geht das ganz gut mit dem Hintergrund der zentrischen Streckung.

Teile die Strecke AB in 7 gleiche Stücke (ohne Rechner, ohne Kopfrechnen)

Schritt 1 – **einen frei wählbaren Winkel an die Strecke anlegen (durch einen Endpunkt)**
Schritt 2 – **auf dem zweiten Schenkel des Winkels sieben Stücke abtragen (z.B. mit dem Massstab jeweils 1 cm lange Stücke abtragen).**
Schritt 3 – **Den Endpunkt auf dem Schenkel des Winkels mit B (Endpunkt der Strecke) verbinden.**
Schritt 4 – **Parallelverschieben dieser Verbindung durch jede Markierung auf dem Winkel.**

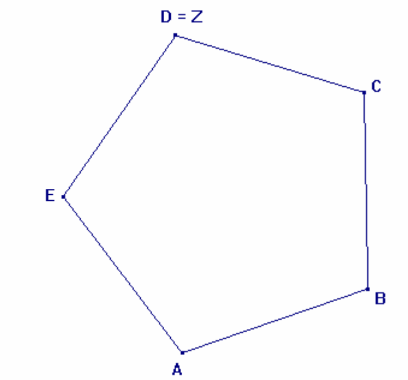


Auf diese Art kann eine Strecke auch in einem bestimmten Verhältnis geteilt werden (z.B. 3:4). Auch dann gibt es sieben Stücke (3+4), man braucht in einem solchen Fall aber nur das Stück Nr. 3 zu zeichnen, denn dort liegt der Teilpunkt.

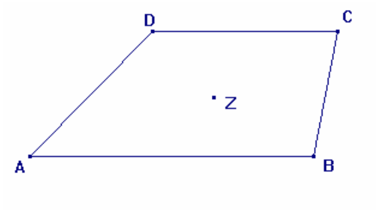
Aufgaben Zentrische Streckung:

1. Strecke die gegebene Figur mit zentrischer Streckung.

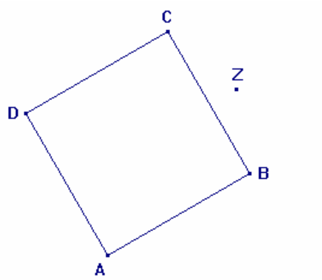
a) k = 0.5



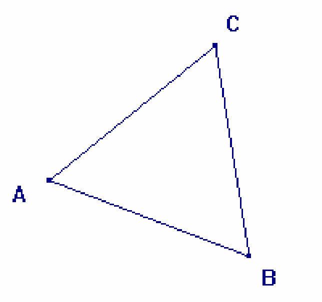
b) k = 2



c) k = (-1.5)

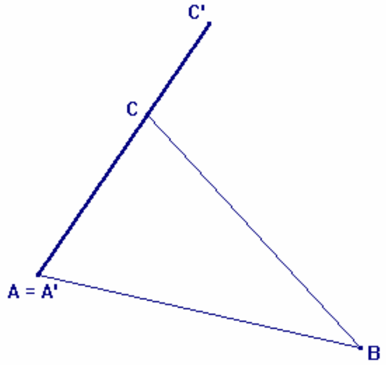


d) A = A' = Z, k = 1.5

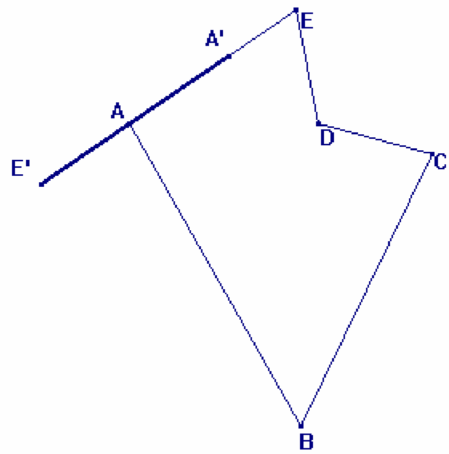


2. **Konstruiere das Bild der gegebenen Figur, wenn du einen Teil der durch zentrische Streckung entstandenen Bildfigur kennst. Bestimme auch das Streckzentrum Z. Ein kurzer KB gehört natürlich auch dazu.**

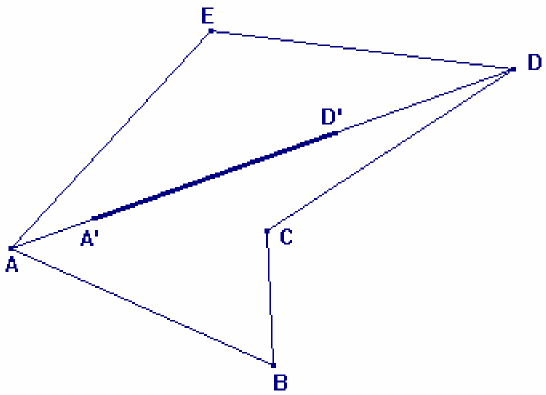
a)



b)

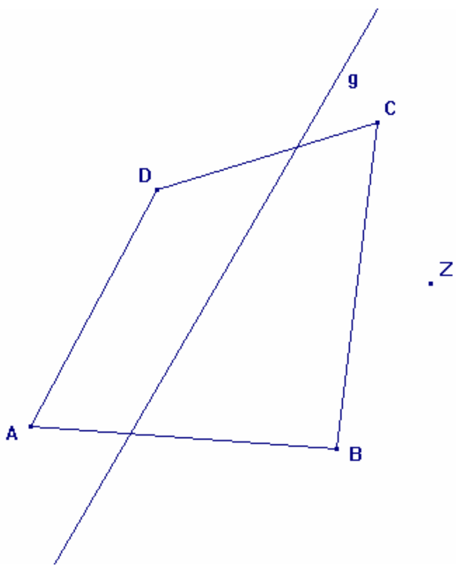


c)

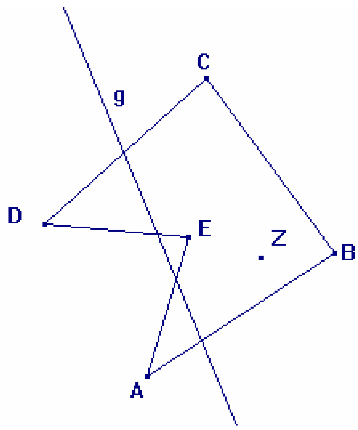


3. **Konstruiere (mit kurzem KB) das Bild der gegebenen Figur mit Hilfe einer zentrischen Streckung mit Zentrum Z so, dass…**

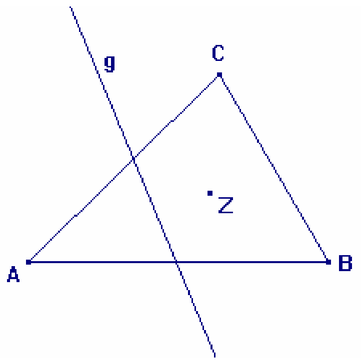
a) der Punkt D’ auf g liegt.



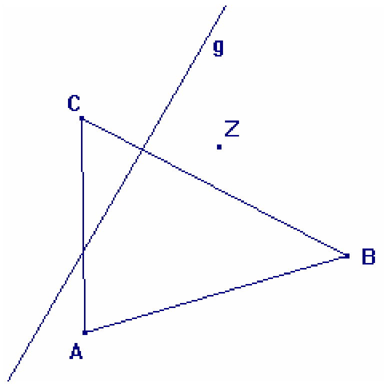
b) der Punkt E’ auf g liegt.



c) ein Eckpunkt der Bildfigur auf g liegt. Zeichne alle Lösungen und markiere mit rot die grösste Bildfigur.

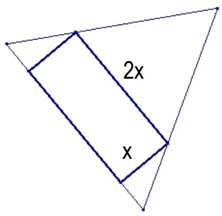


d) die Bildfigur möglichst klein wird und ein Eckpunkt der Bildfigur auf g liegt.



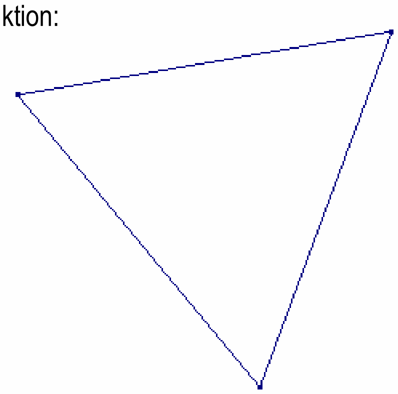
4. Die gegebene Figur ist dünn ausgezogen. Schreibe ihr eine Figur entsprechend der Skizze ein (mit KB, natürlich)

a) Skizze:

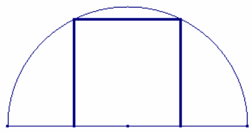


KB:

Konstruktion:

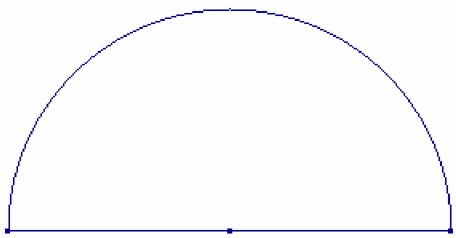


b) Skizze:



KB:

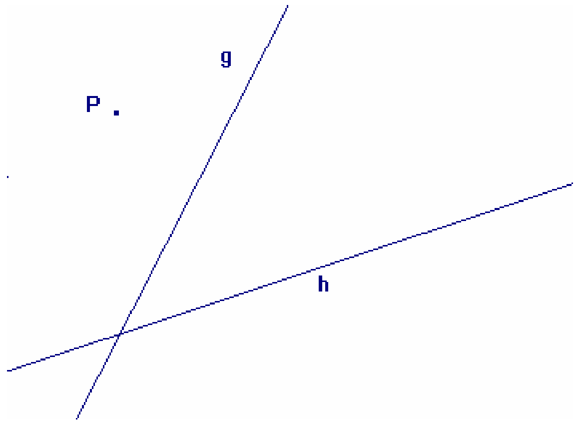
Konstruktion:



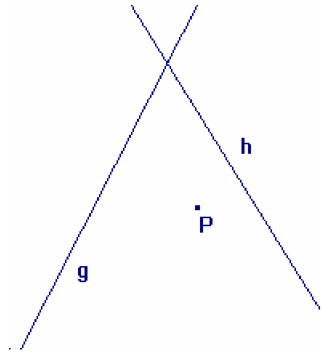
5. Die Gerade AB soll in 13 gleich lange Teile zerlegt werden. Konstruiere diese Teilung.

6. Lege durch P eine Gerade, welche die Gerade g in A und die Gerade h in B schneidet, wobei

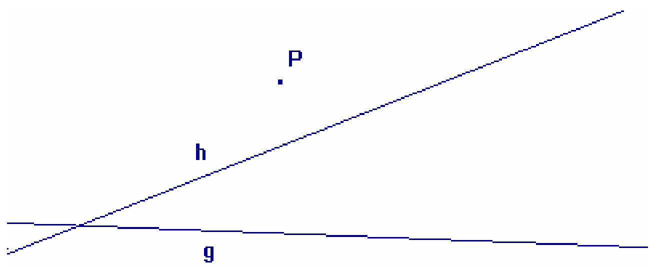
a) PB zweieinhalb mal so lang sein soll wie PA



b) PB halb so lang ist wie PA.

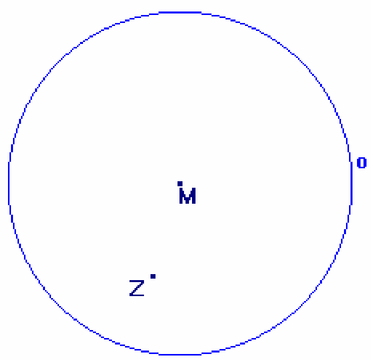


c) Sich die Strecken PB zu BA wie 3:2 verhalten.

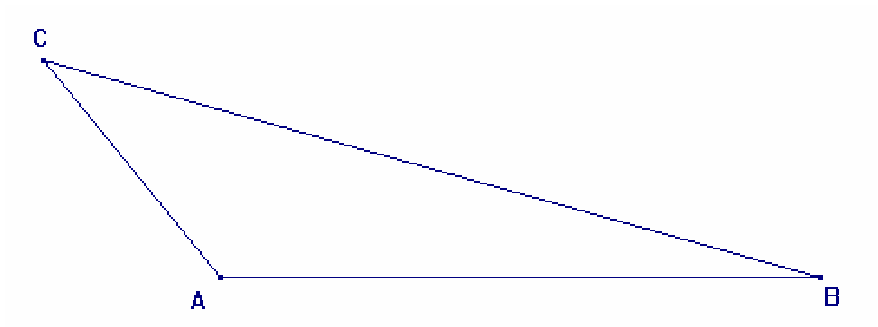


7. Teile die Strecke CD im Verhältnis 5:4 und bezeichne den Teilpunkt mit T.

8. Strecke einen Kreis o mit dem Streckfaktor k = 1.5 vom Streckzentrum Z aus.

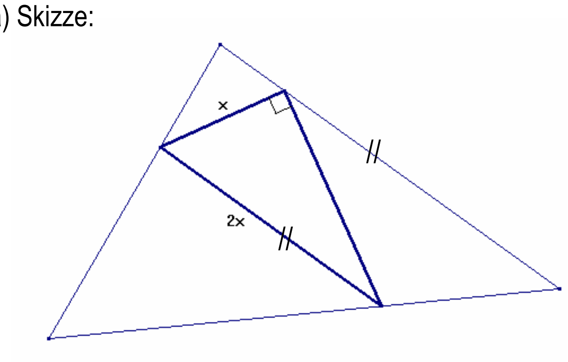


9. **Schreibe dem gegebenen Dreieck ein Rechteck ein, dessen Länge dreimal so gross wie wie seine Breite und dessen eine Seite (die Länge) auf BC liegt (mit KB).**



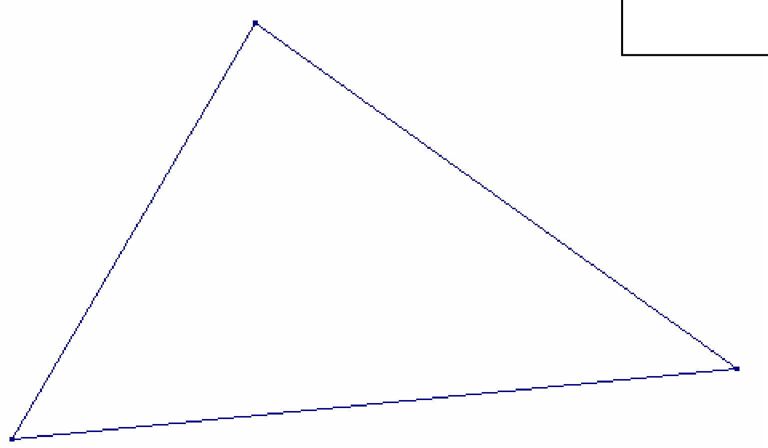
10. **Die gegebene Figur ist dünn ausgezogen. Schreibe ihr eine Figur entsprechend der Skizze ein (mit KB, natürlich)**

a) Skizze:



Konstruktion:

KB:



11. Strecke die gegebene Figur mit dem Streckfaktor k = ($-\frac{5}{3}$). Den Rechner darfst du nicht benützen, auch Kopfrechnen ist nicht erlaubt. Nur konstruieren. (KB nicht vergessen)