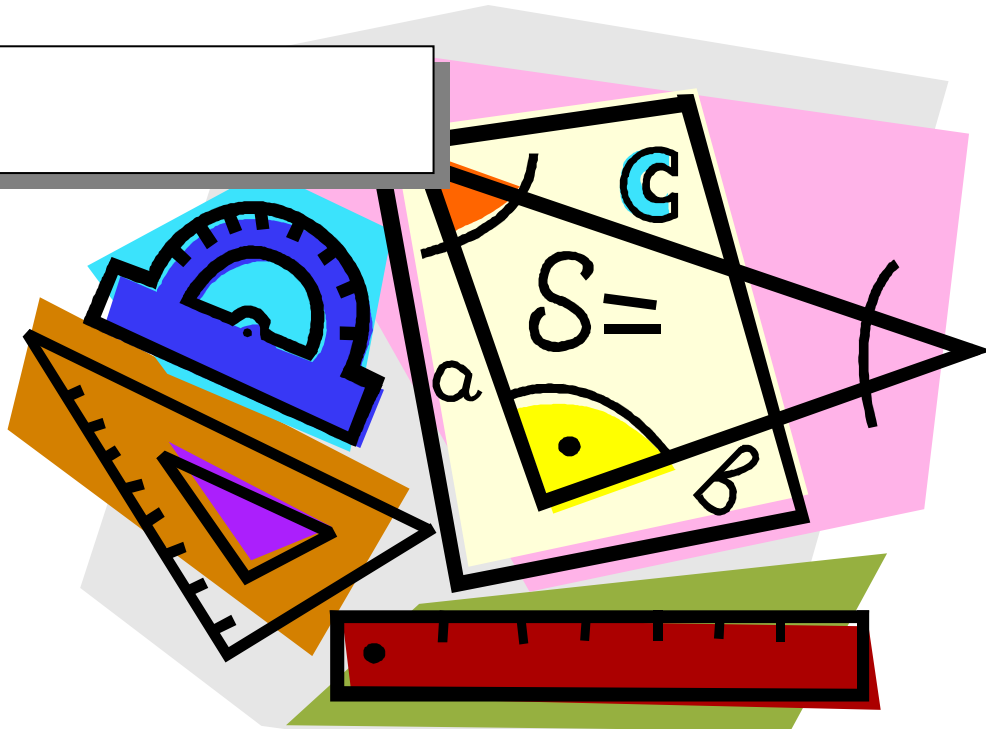


Geometrie-Dossier

Senkrechte Prismen

Name:




Inhalt:

- Was sind Prismen? Formvergleiche, Eigenschaften von senkrechten Prismen.
- Benennen von senkrechten und schiefen Prismen.
- Das Netz eines Prismas.
- Einzeichnen von Schnittflächen in Quadern, Prismen und deren Netz
- Berechnungen von Volumen, Oberfläche und Mantelfläche von Prismen

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  gekennzeichnet

schwierigere Aufgaben sind mit einem  gekennzeichnet.

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

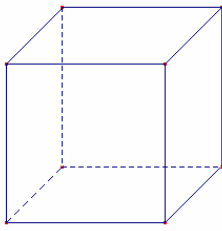
Beachten: Konstruktionen: Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)
Skizzen: Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.
Sichtbarkeit: In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.

1. Was sind Prismen? – Formvergleiche

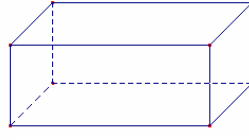
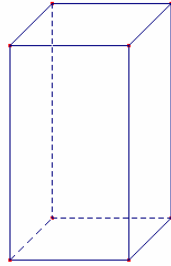
a) Formvergleiche

Aus unseren bisherigen Betrachtungen kennen wir die beiden Raumfiguren Würfel und Quader. Was genau unterscheidet das Prisma also von den Würfeln oder Quadern?

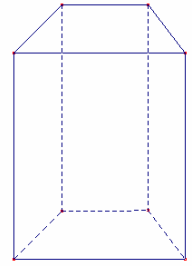
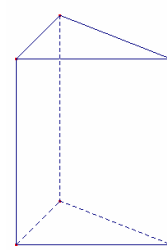
Würfel:



Quader



Prisma



Natürlich sehen wir relativ schnell, dass sich das Prisma grundsätzlich von den beiden anderen Körpern durch seine Form unterscheidet. Seine Grund- und Deckfläche sind nicht rechteckig (wobei man der Vollständigkeit halber sagen muss, dass auch alle Quader und Würfel als Prismen bezeichnet werden können, aber nicht umgekehrt).

Zudem sehen wir, dass die Prismen nicht alle gleich viele Flächen haben, dies hängt ganz von der Form der Grundfläche ab. So gibt es z.B. dreiseitige Prismen, aber auch vier-, fünf- oder zehenseitige Prismen.

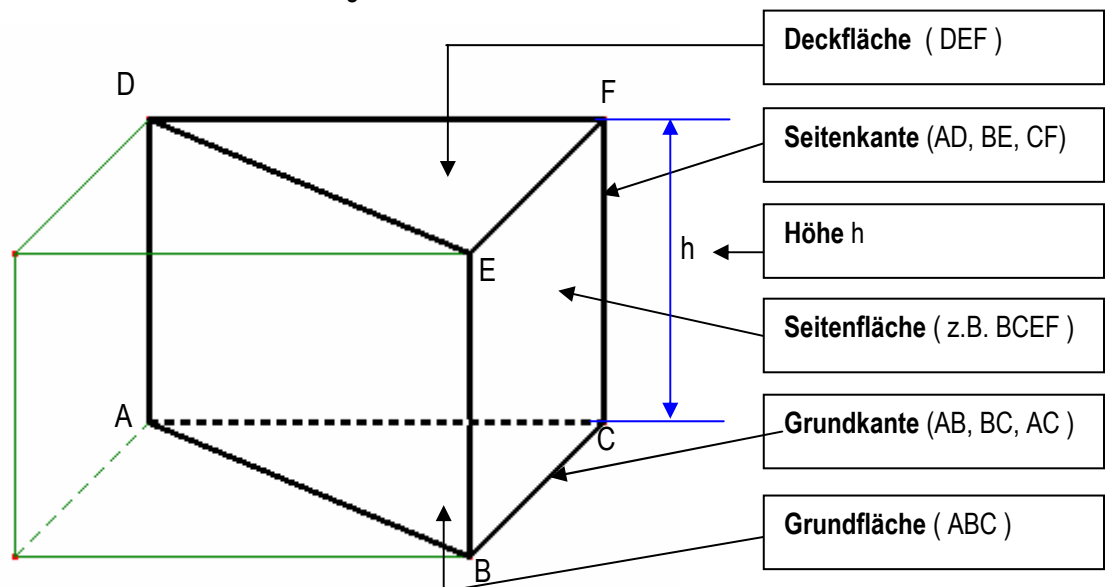
Sehen wir uns das Prisma (für den Anfang beschäftigen wir uns mit dem senkrechten Prisma) einmal genauer an:

b) Das senkrechte, dreiseitige Prisma:

Der Begriff „senkrecht, dreiseitiges Prisma“ beinhaltet zwei Teilbegriffe:

1. Das **senkrechte Prisma** (was bedeutet, dass alle Seitenflächen senkrecht auf der Grundseite stehen)
2. Das **dreiseitige Prisma** (was bedeutet, dass das Prisma ein Dreieck als Grundseite aufweist).

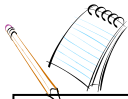
Ein solches senkrecht, dreiseitiges Prisma entsteht zum Beispiel dann, wenn man einen Quader diagonal zerschneidet. Die einzelnen Teile werden wie folgt definiert:



Besondere Eigenschaften des Prismas:

- **Grund- und Deckfläche sind parallele und kongruente Figuren** (hier Dreiecke, darum dreiseitiges Prisma)
- **Alle Seitenflächen sind Rechtecke** (oder Quadrate).
Zusammen bilden die Seitenflächen den Mantel des Prismas
- **Die Seitenkanten sind zueinander parallel.**
Hier stehen sie sogar senkrecht auf der Grund- und Deckfläche (darum senkrecht Prisma)

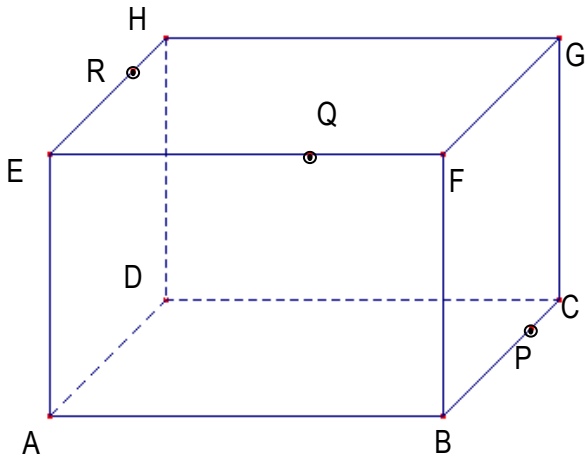
→ Das berühmteste Prisma der Welt heiss übrigens „Toblerone“ (zumindest die Verpackung ist ein Prisma)



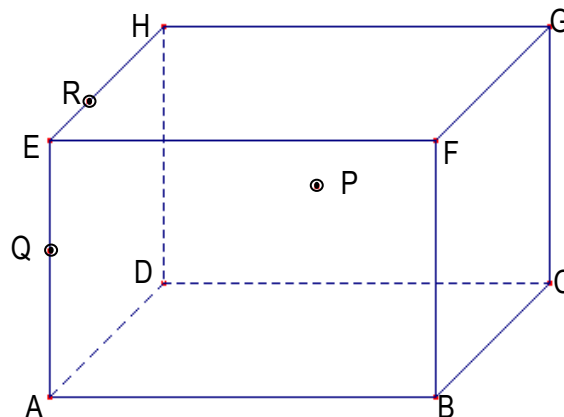
Schnittflächen in Quadern / Einfache Prismen zeichnen:

Achtung, denk daran, dass in parallelen Seitenflächen des Quaders auch die Schnittkanten parallel sind.

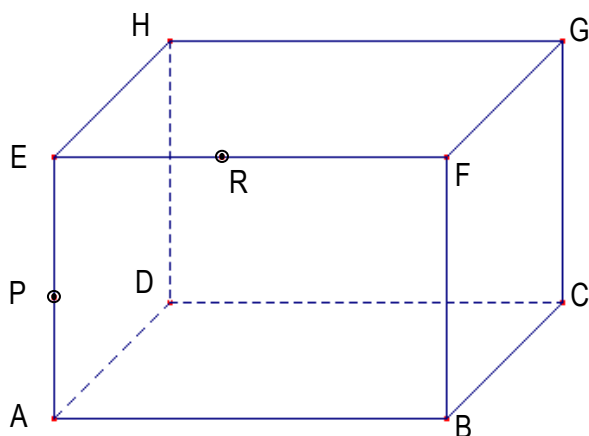
1. Zeichne die Schnittfläche im Raumbild des Quaders ein, wenn du weisst, dass die Schnittfläche durch die Punkte P, Q und R geht.



b) $P \in CDGH$



2. Markiere im gegebenen Quader mit ROT eine möglichst grosse, trapezförmige Schnittfläche. Mit GRÜN markierst du eine möglichst grosse dreieckige Schnittfläche. (Beide Schnittflächen müssen durch P und R gehen).

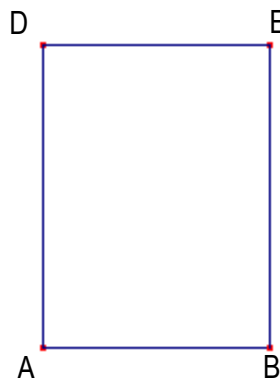
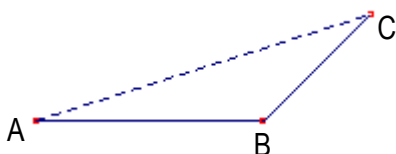


3. Zeichne ein senkrecht, dreiseitiges Prisma mit der Grundseite ABC (rechtwinkliges Dreieck).



a) Gegeben: Grundseite ABC
Die Höhe h beträgt 4 cm

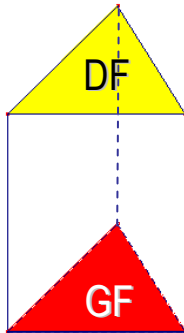
b) Gegeben Seitenfläche ABDE
Die Tiefe beträgt 4cm (Originallänge, Achtung Raumbild)



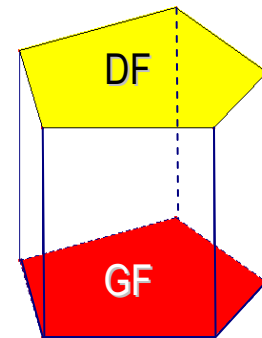
2. Benennen von Prismen – Senkrechte und Schiefe Prismen

a) Senkrechte Prismen (oder auch „gerade Prismen“)

Wie oben angedeutet, sind nicht alle Prismen auch senkrechte Prismen. Nur dann, wenn die **Seitenflächen** (und entsprechend auch die Seitenkanten) **senkrecht auf der Grundseite** (und damit auch auf der Deckseite) stehen, spricht man von einem senkrechten Prisma.

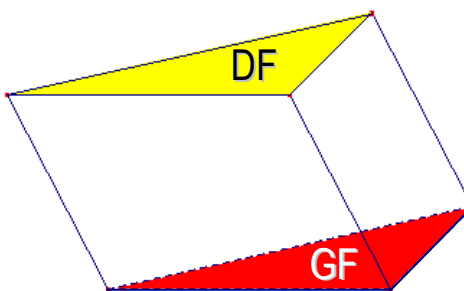


alle Seitenflächen (Seitenkanten) stehen senkrecht zur Grundfläche
→ **Senkrechte Prismen**



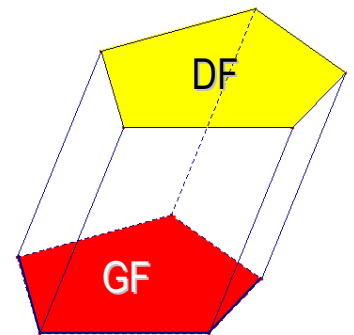
b) Schiefe Prismen

Alle anderen Prismen heißen schiefe Prismen. Sie erfüllen zwar viele Bedingungen an ein Prisma (Grund- und Deckseite sind kongruent, alle Seitenflächen sind Parallelogramme), alle Seitenkanten sind zueinander parallel, aber die **Seitenflächen stehen eben nicht senkrecht auf der Grundfläche**.



Grund- und Deckfläche sind kongruent, alle Seitenflächen sind Parallelogramme. Alle Seitenkanten sind parallel, aber nicht senkrecht auf der Grundfläche.

→ **Schiefe Prismen**



c) Prismennamen

Wie auch schon erwähnt, werden Prismen auf Grund der Form ihrer Grundfläche benannt. Denn die Grundfläche bestimmt, wie viele Seitenflächen ein Prisma aufweist. Entsprechend werden Prismen denn auch mit „-seitig“ bezeichnet. (Natürlich hat die Deckfläche die genau gleiche Form wie die Grundfläche)

Also: Eine dreieckige Grundfläche erzeugt ein dreiseitiges Prisma
Eine viereckige Grundfläche ergibt ein vierseitiges Prisma
Eine fünfeckige Grundfläche ergibt ein fünfseitiges Prisma

und so weiter...

Kurz: Eine n-eckige Grundfläche ergibt ein n-seitiges Prisma.

Die Prismen haben somit kombinierte Namen:

Dreiseitiges gerades Prisma: Dreieckige Grundfläche, alle Seitenflächen sind senkrecht zur Grundfläche.

Fünfseitiges schiefes Prisma: Fünfeckige Grundfläche, die Seitenflächen stehen NICHT senkrecht zur Grundfläche.

Zudem: Jeder Würfel ist gleichzeitig Quader und Prisma, jeder Quader ist gleichzeitig ein Prisma. Denn alle Bedingungen an ein Prisma werden von Quader und Würfel erfüllt. (aber nicht umgekehrt)

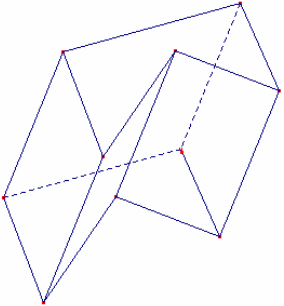
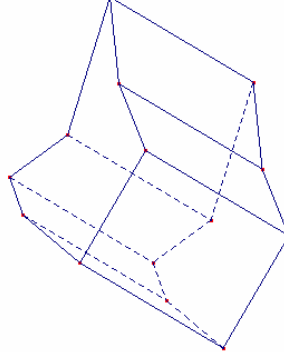
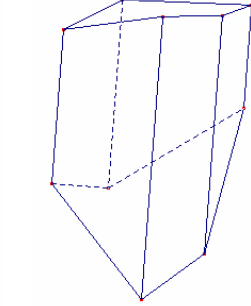
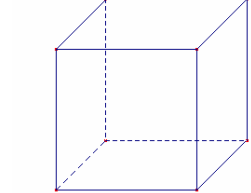
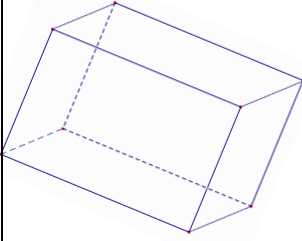
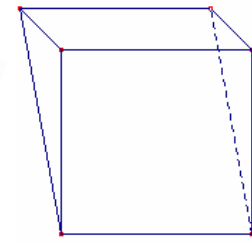
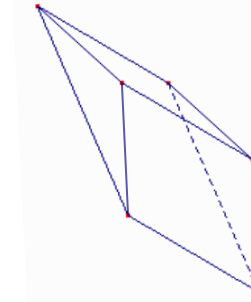
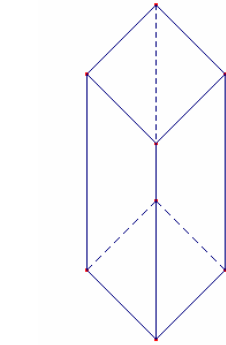


Benennen von Prismen:



1. Löse die folgende Aufgabe

- Markiere in den dargestellten Prismen die Grundfläche mit rot, die Deckfläche mit gelb.
- Bestimme danach, ob es sich dabei jeweils um ein senkrecht, ein schiefes oder gar kein Prisma handelt
- Benenne die Figuren (Quader, Pyramide, dreiseitiges Prisma, fünfseitiges Prisma etc.). Zum Teil musst du mehrere Dinge ankreuzen (also alle richtigen Bezeichnungen)!

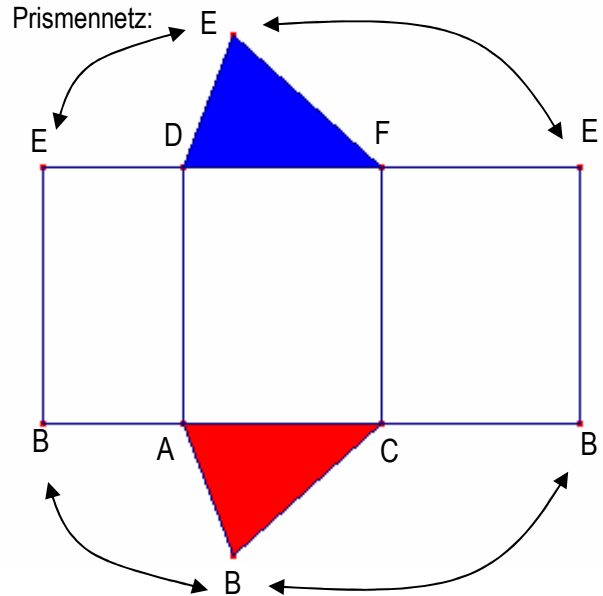
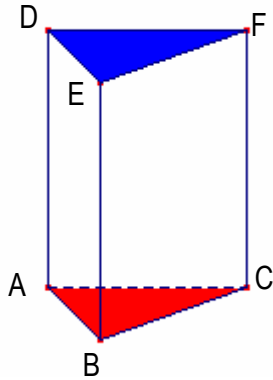
 <p> <input type="checkbox"/> Quader oder Würfel <input type="checkbox"/> weder noch <input type="checkbox"/> Prisma </p> <p> <u>bei Prismen:</u> <input type="checkbox"/> senkrecht Prisma <input type="checkbox"/> schiefes Prisma -seitiges Prisma </p>	 <p> <input type="checkbox"/> Quader oder Würfel <input type="checkbox"/> weder noch <input type="checkbox"/> Prisma </p> <p> <u>bei Prismen:</u> <input type="checkbox"/> senkrecht Prisma <input type="checkbox"/> schiefes Prisma -seitiges Prisma </p>	 <p> <input type="checkbox"/> Quader oder Würfel <input type="checkbox"/> weder noch <input type="checkbox"/> Prisma </p> <p> <u>bei Prismen:</u> <input type="checkbox"/> senkrecht Prisma <input type="checkbox"/> schiefes Prisma -seitiges Prisma </p>	 <p> <input type="checkbox"/> Quader oder Würfel <input type="checkbox"/> weder noch <input type="checkbox"/> Prisma </p> <p> <u>bei Prismen:</u> <input type="checkbox"/> senkrecht Prisma <input type="checkbox"/> schiefes Prisma -seitiges Prisma </p>
 <p> <input type="checkbox"/> Quader oder Würfel <input type="checkbox"/> weder noch <input type="checkbox"/> Prisma </p> <p> <u>bei Prismen:</u> <input type="checkbox"/> senkrecht Prisma <input type="checkbox"/> schiefes Prisma -seitiges Prisma </p>	 <p> <input type="checkbox"/> Quader oder Würfel <input type="checkbox"/> weder noch <input type="checkbox"/> Prisma </p> <p> <u>bei Prismen:</u> <input type="checkbox"/> senkrecht Prisma <input type="checkbox"/> schiefes Prisma -seitiges Prisma </p>	 <p> <input type="checkbox"/> Quader oder Würfel <input type="checkbox"/> weder noch <input type="checkbox"/> Prisma </p> <p> <u>bei Prismen:</u> <input type="checkbox"/> senkrecht Prisma <input type="checkbox"/> schiefes Prisma -seitiges Prisma </p>	 <p> <input type="checkbox"/> Quader oder Würfel <input type="checkbox"/> weder noch <input type="checkbox"/> Prisma </p> <p> <u>bei Prismen:</u> <input type="checkbox"/> senkrecht Prisma <input type="checkbox"/> schiefes Prisma -seitiges Prisma </p>

3. Das Netz von Prismen

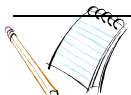
Auch bei den Prismen verstehen wir das Netz als „Bastelbogen“. Entsprechend müssen wir also jede einzelne Fläche in ihrer wahren Grösse (also die richtigen Masse, nicht die verkürzten, welche beim Raumbild z.T. verwendet werden). Wir brauchen also eine Grundseite, eine gleich grosse Deckfläche und eine Anzahl Seitenflächen (je nach Form der Grundfläche).

Als Beispiel nehmen wir ein dreiseitiges, senkrecht Prisma (mit gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche ABC)

Raumbild:

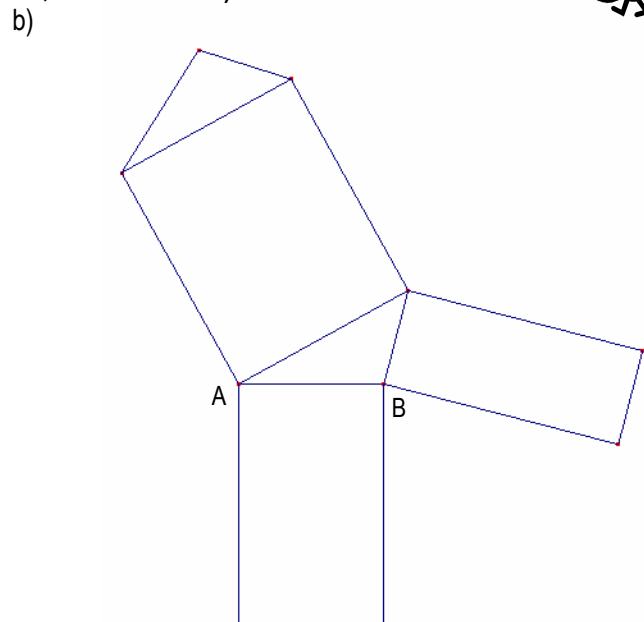
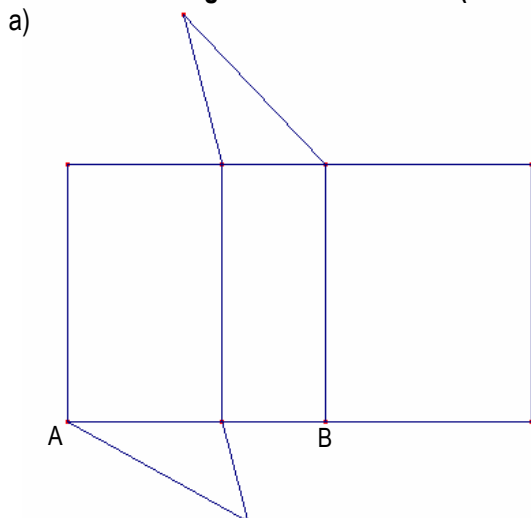


Beim Beschriften muss man vorstellen, das Netz wieder „zusammenzubauen“, also den Bastelbogen so richtig „aufzufalten“. Dann findet man auch die entsprechenden Ecken. Im Raumbild kann man zudem schauen, welche Kanten durch welche Punkte verlaufen. Wenn man z.B. den Punkt A kennt, können die durch A laufenden Kanten nur eine von zwei Möglichkeiten sein: AD oder AB. Entweder bewegt man sich also in der Grundfläche (\rightarrow AB) oder man geht der Höhe entlang in die Deckfläche hinauf (\rightarrow AD)



Beschriften von Prismen und ihren Netzen:

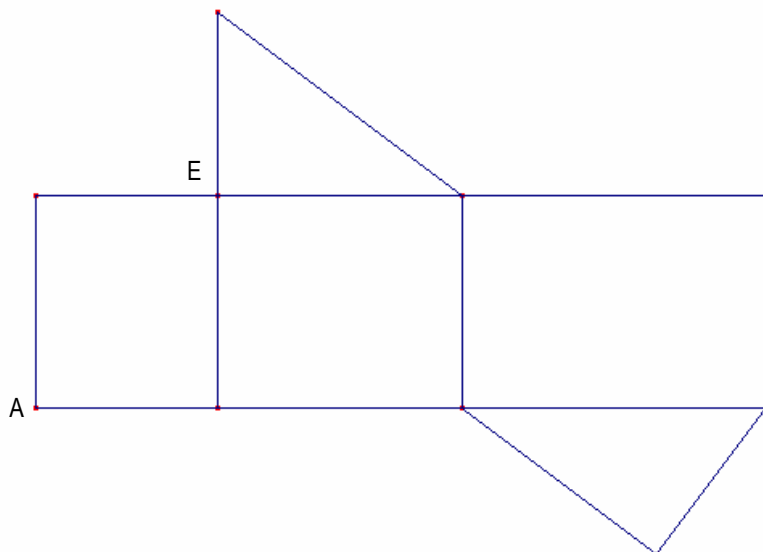
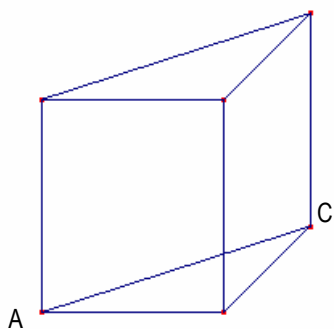
1. Beschrifte die folgenden Prismennetze (Grundseite ABC, Deckseite DEF):



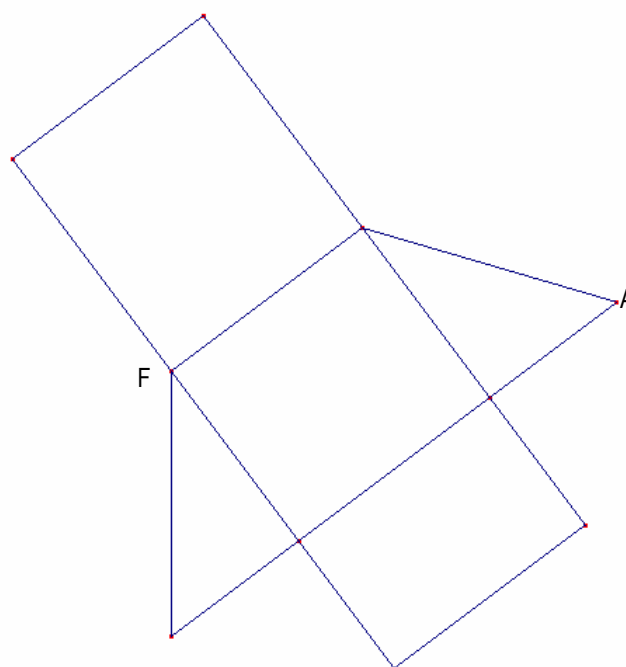
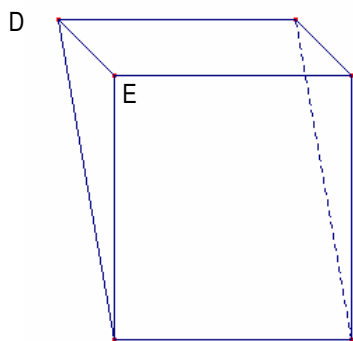
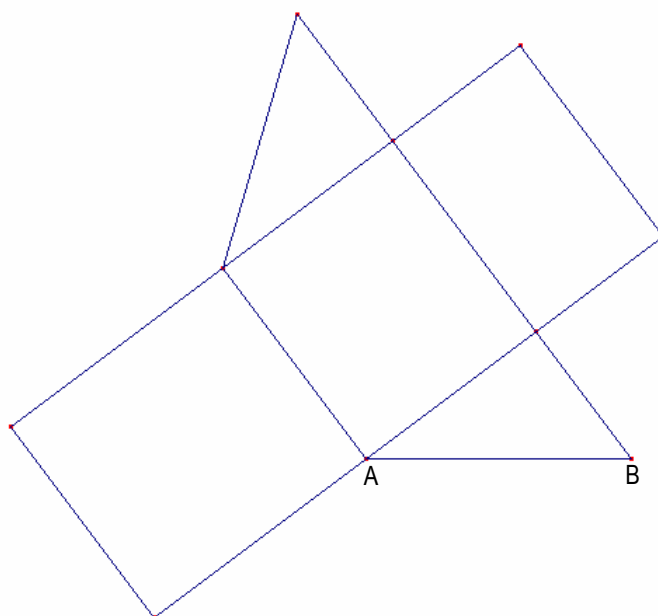
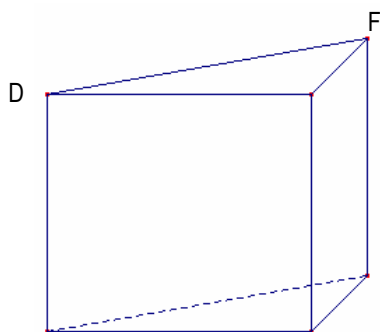
2. Vervollständige die Beschriftung im Raumbild und im Netz:



a)



c)

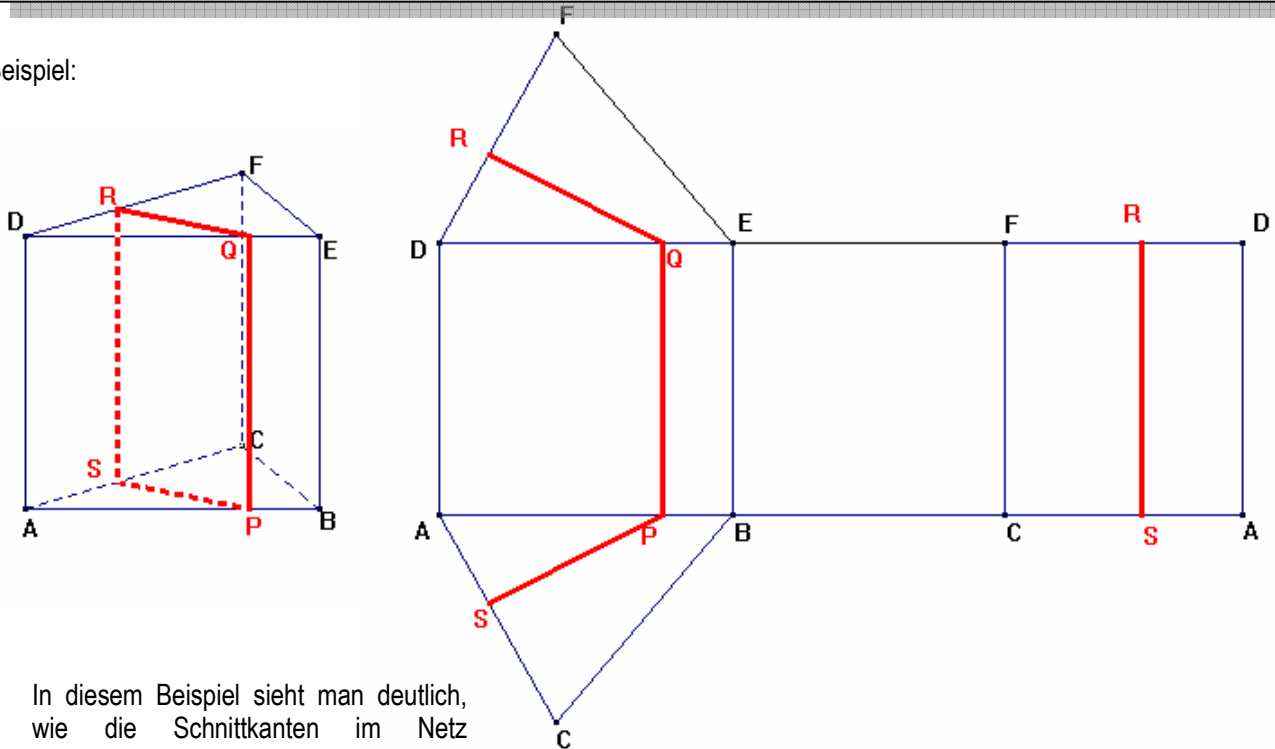


4. Einzeichnen von Schnittflächen in Quadern, Prismen und deren Netz.

Wir haben das Einzeichnen von Schnittflächen in Quadern oben geübt. Jetzt wollen wir zusätzlich auch Prismen zerschneiden und diese Schnittkanten auch im Prismennetz einzeichnen. Die Grundidee ist genauso, wie damals beim Quader. Erinnerst du dich noch?

1. Alle **Beschriftungen vervollständigen** (Netz und Raumbild)
2. Die **Punkte der Schnittebene einzeln ins Netz übertragen** (Achtung, einzelne Punkte könnten mehrmals vorkommen)
3. **Für jede Schnittkante überlegen:**
 - a. In welcher Fläche verläuft sie (Grundfläche, Deckfläche, Seitenfläche links, rechts, hinten, vorne,) ?
 - b. Diese Fläche im Netz bestimmen und die entsprechende Schnittkante ausschliesslich in dieser Fläche einzeichnen.

Beispiel:



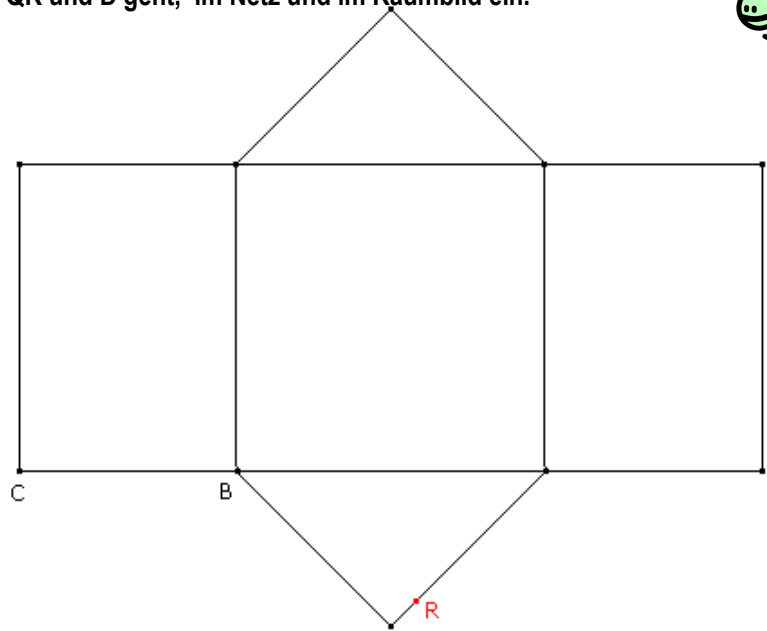
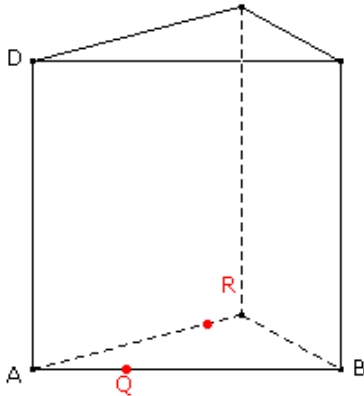
In diesem Beispiel sieht man deutlich, wie die Schnittkanten im Netz „auseinandergerissen“ werden. Wie aber kommt man zu diesem Netz?

1. Beschriften (hier fällt auf, dass der Punkt C und der Punkt A in der Grundfläche, sowie ihre „Pendants“ in der Deckfläche jeweils zweimal vorkommen)
2. Die Punkte P, Q, R und S werden einzeln ins Netz übertragen. Genau darauf achten, dass man die Punkte auf der richtigen Kante einzeichnet (z.B. P auf AB, S auf AC, Q auf DE und R auf DF). Genau messen, damit die Abstände stimmen. Achtung, manche Kanten kommen mehrfach vor → Punkte mehrfach einzeichnen.
3. Anschliessend bestimmen, in welcher Fläche die Schnittkanten verlaufen:
 - PS verläuft in der Grundfläche. Somit muss auch im Netz die Strecke PS in der Grundfläche liegen
 - RS verläuft in der hinteren Fläche DFAC. Entsprechend wird sie im Netz eingezeichnet.
 - RQ liegt in der Deckfläche. Somit zeichnen wir sie im Netz auch in der Deckfläche DFE ein.
 - QP verläuft in der vorderen Fläche ABED. Darum liegt sie auch im Netz in der entsprechenden Fläche.

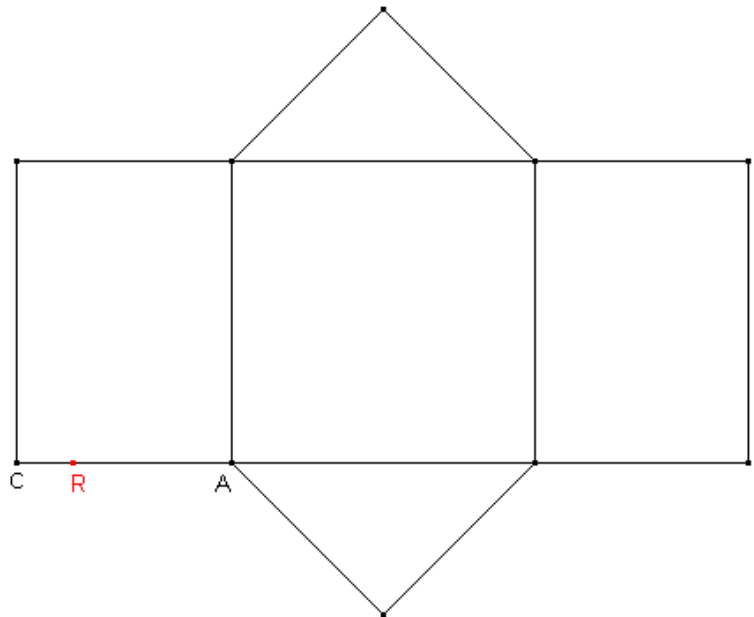
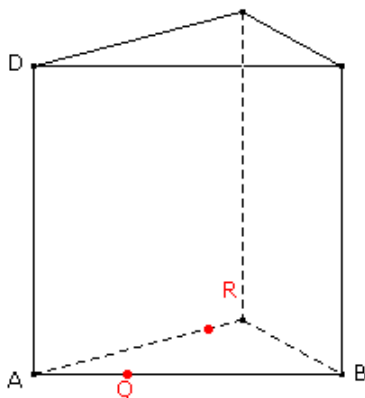


Schnittkanten und Schnittflächen einzeichnen:

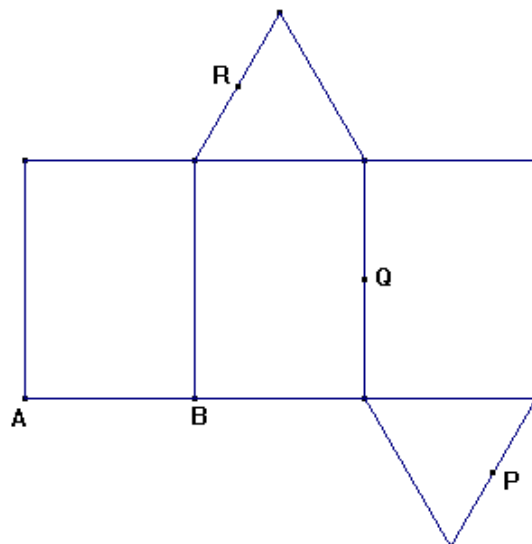
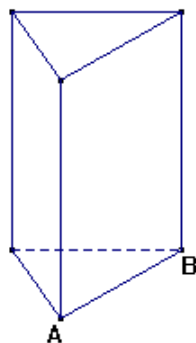
1. Zeichne die Schnittfläche, welche durch QR und D geht, im Netz und im Raumbild ein.



2. Zeichne die Schnittfläche, welche Q und R geht und senkrecht auf der Grundfläche steht, im Netz und im Raumbild ein.



3. Zeichne die Schnittfläche, welche durch P, R und Q geht im Raumbild und im Netz ein. (P, Q, R sind Kantenmitten)



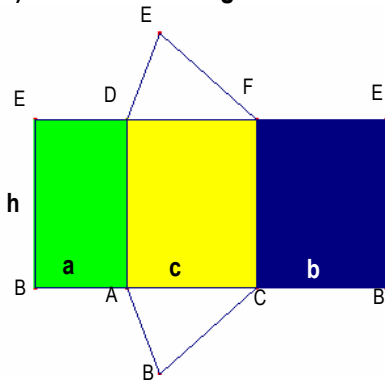
5. Berechnungen von Volumen, Oberfläche und Mantelfläche von Prismen

Grundüberlegung

Wie besprochen, setzt sich ein Prisma aus der Grundfläche, der Deckfläche und einer Anzahl Seitenflächen (=Mantel) zusammen. Dies entspricht auch der Überlegung, welche wir bei Quadern schon ausführlich besprochen haben.

Für die Berechnung der Oberfläche (das ist „das, was man anmalen kann“) brauchen wir also die Grösse der Grund- und Deckfläche, sowie die Grösse der Mantelfläche.

a) Die Berechnung der Mantelfläche eines Prismas



Mantelfläche:



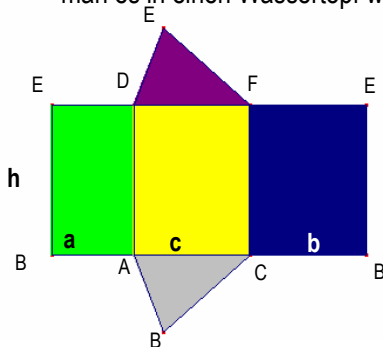
$$M = a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h = (a+b+c) \cdot h = u \cdot h = \text{Umfang} \cdot \text{Höhe}$$

Für alle Prismen gültig: Mantel = Umfang_{Grundfläche} • Höhe

$$M = u \cdot h = (a+b+c) \cdot h$$

b) Die Berechnung der Oberfläche eines Prismas

Wie schon immer ist die Oberfläche eines Körpers all das, was bemalt werden kann (oder was nass wird, wenn man es in einen Wassertopf wirft). Die Oberfläche ist also die Fläche des Körpernetzes.



Oberfläche: $S = \text{Grundfläche} + \text{Deckfläche} + \text{Mantel}$

weil Deckfläche = Grundfläche

Für alle Prismen gültig: Oberfläche = 2 • Grundfläche + Mantel

$$S = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + u \cdot h$$

c) Die Berechnung des Volumens eines Prismas

Das Prismenvolumen berechnet sich nach der gleichen Überlegung, wie das Volumen des Quaders. Wenn man das blaue „Grundseitendreieck“ so viele Male wie möglich aufeinanderlegt, macht es das Volumen aus.

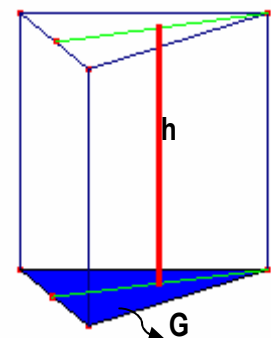
Zur Erinnerung: Das Volumen eines Quaders wurde berechnet als

$$\boxed{\text{Länge} \cdot \text{Breite}} \cdot \text{Höhe} = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

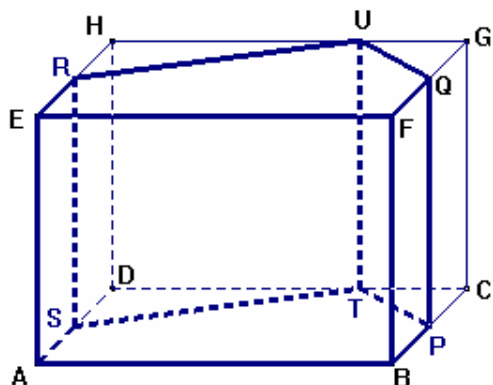
Wie wir wissen, ist jeder Quader auch ein Prisma. Also gilt auch für das Prisma:

Für alle Prismen gültig: Volumen = Grundfläche • Höhe

$$V = G \cdot h$$



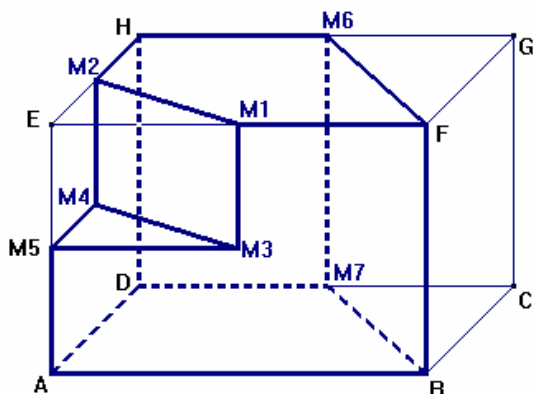
4. Berechne das Volumen des abgebildeten Restkörpers



$AB = 10 \text{ cm}$ $AS = CP = CT = 3 \text{ cm}$
 $BC = 6 \text{ cm}$ $AE = 7 \text{ cm}$

Berechnungen:

5. Berechne das Volumen und die Oberfläche des abgebildeten Restkörpers.



$AB = 8 \text{ cm}$ $M1-M7$: Kantenmitten
 $BC = 10 \text{ cm}$ $AE = 6 \text{ cm}$
