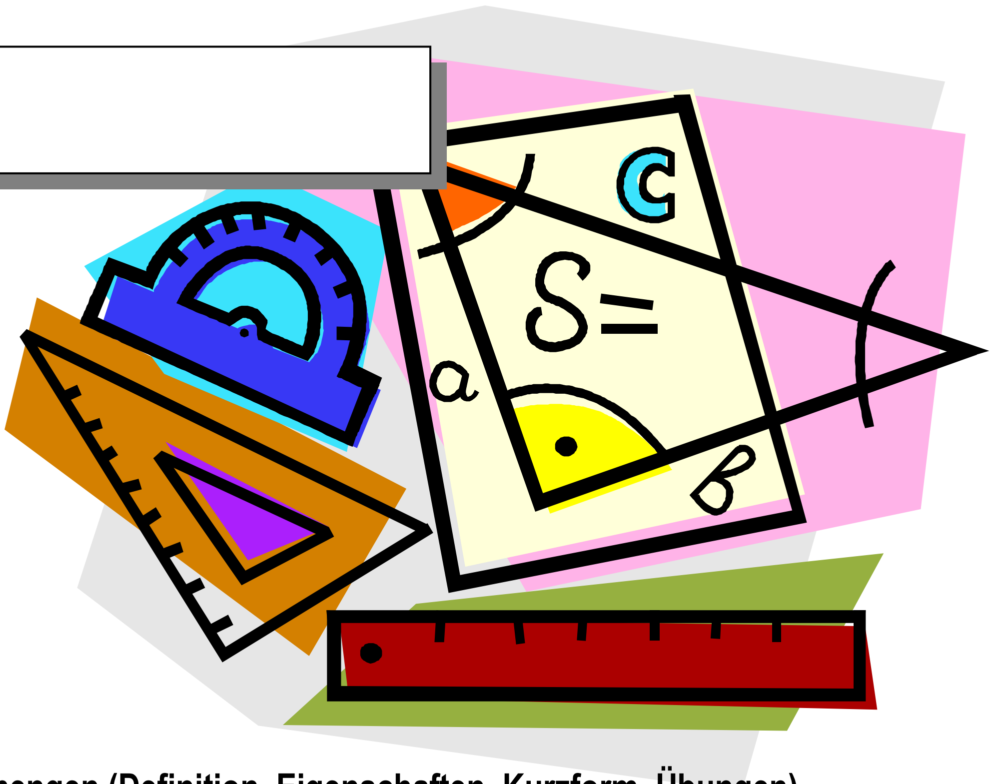
Geometrie-Dossier
Punktmengen und Dreiecke

Name:



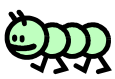
Inhalt:

- **Punktmengen (Definition, Eigenschaften, Kurzform, Übungen)**
- **Dreiecke (Definition, Eigenschaften, Höhen und Schwerlinien)**
- **Konstruktionshilfen für Dreiecke (Thaleskreis, Höhenstreifen, Umkreis)**
- **Dreiecke - Spezielles**
- **Winkel im Dreieck (Winkelsumme, Z-Winkel, F-Winkel)**

Eine farbige Version zum Download findest du im Internet unter www.andiraez.ch/schule

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*
	Sichtbarkeit:	*In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.*

1. Punktmengen

1.1 Definition des Begriffes

Unter dem Begriff „Punktmenge“ versteht man eine Menge von Punkten, die alle eine ganz bestimmte Eigenschaft haben. In früheren Jahren hat man die „Punktmenge“ als „geometrischen Ort“ bezeichnet. Beide Begriffe meinen das Gleiche. Eine Punktmenge kann ein einzelner Punkt, mehrere Punkte oder eine Linie (eine unendliche Anzahl von Punkten) sein.

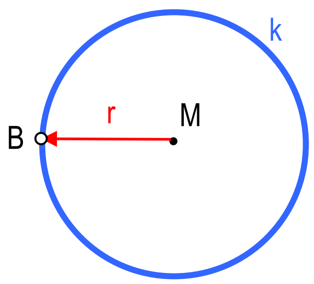
1.2 Die Kreislinie

Eine erste Punktmenge ist der Kreis (oder genauer: Die Kreislinie). Denn auf der Kreislinie finden sich alle Punkte, die von einem speziellen Punkt (Kreismittelpunkt) die gleiche Entfernung haben. Und genau dies ist die bestimmte Eigenschaft der Punktmenge, die auf der Kreislinie zu finden sind.

Problemstellung: *Zeichne alle Punkte ein, die von einem Punkt M die gleiche Entfernung haben*

oder: Zeichne alle Punkte, die von einem Punkt M gleich weit entfernt sind wie der Punkt B.

Entsprechende Punktmenge / Definition:



Der **Kreis** (k) ist die **Menge aller Punkte**, die **von einem Punkt M** (Kreismittelpunkt) **die gleiche Entfernung** haben (hier z.B. die Entfernung MB). Diese Entfernung nennen wir Radius (r)

Kurz-Schreibweise: **k (M; r)**

„Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r“

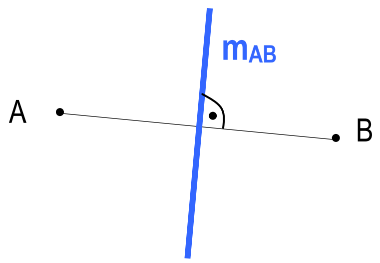
Konstruktion:
Zirkel bei M einstecken, Zirkelöffnung entspricht dem Radius.

1.3 Die Mittelsenkrechte

Eine weitere Punktmenge heisst „Mittelsenkrechte zweier Punkte“. Sie zeichnet alle Punkte, welche von einem Punkt A und einem zweiten Punkt B gleich weit entfernt sind.

Problemstellung: *Zeichne alle Punkte ein, die von den Punkten A und B die gleiche Entfernung haben.*

Entsprechende Punktmenge / Definition:



Die Menge aller Punkte, die **von zwei Punkten A und B** die **gleiche Entfernung** haben, ist die **Mittelsenkrechte** der Strecke AB**.**

Kurz-Schreibweise: $\mathbf{m_{AB}}$

„Mittelsenkrechte der Punkte A und B“

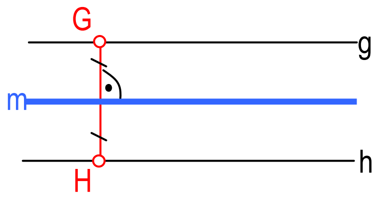
Konstruktion:
A und B verbinden, mit Zirkel die Mittelsenkrechte zeichnen.

1.4 Die Mittelparallele

Suchen wir die Punktmenge, welche alle Punkte bezeichnet, die von zwei parallelen Geraden g und h den gleichen Abstand haben, so landen wir bei der Mittelparallelen.

Problemstellung: *Zeichne alle Punkte ein, die von den parallelen Geraden g und h gleichen Abstand haben.*

Entsprechende Punktmenge / Definition:



Die Menge aller Punkte, die **von zwei parallelen Geraden** g und h den **gleichen Abstand** haben, heisst **Mittelparallele m** dieser beiden Geraden.

Kurz-Schreibweise: $\mathbf{m_{g,h}}$

„Mittelparallele der Geraden g und h"

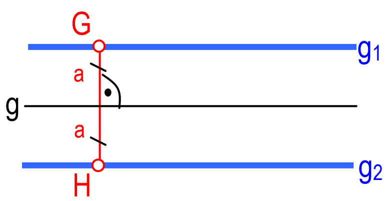
Konstruktion:
Lot auf g und h zeichnen. Es entstehen die Punkte G auf g und H auf g. Dann die Mittelsenkrechte der beiden Punkte G und H zeichnen..

1.5 Das Parallelenpaar

Nun können wir natürlich auch von einer Gerade ausgehen und uns fragen, wo die alle Punkte liegen, die von dieser Geraden den gleichen Abstand haben. Das ist im Prinzip die gegenteilige Überlegung zur Mittelparallele und sieht grafisch gleich auf.

Problemstellung: *Zeichne alle Punkte ein, die von einer Geraden g den gleichen Abstand haben.*

Entsprechende Punktmenge / Definition:



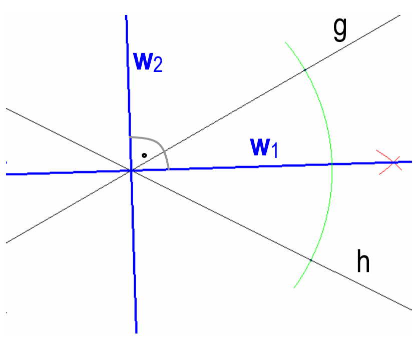
Das **Parallelenpaar g_1, g_2** ist die Menge aller Punkte, die **zu einer Geraden g den Abstand a haben**.

Konstruktion:
Lot auf g zeichnen, mit Zirkel den Abstand a abtragen. So entstehen die Punkte G und H. Dann g parallel durch G und H verschieben.

1.6 Die Winkelhalbierenden

Problemstellung: *Zeichne alle Punkte ein, die von den sich schneidenden Geraden g und h den gleichen Abstand haben.*

Entsprechende Punktmenge / Definition:



Die Menge aller Punkte, die **von zwei sich schneidenden Geraden** g und h jeweils **den gleichen Abstand** haben, ist das **Paar der Winkelhalbierenden w_1, w_2** der Winkel dieser Geraden

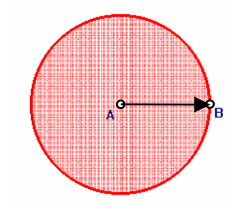
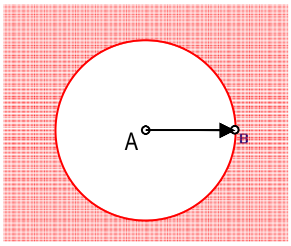
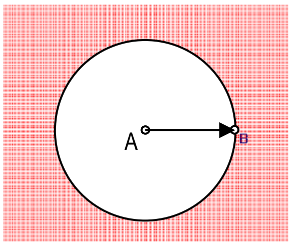
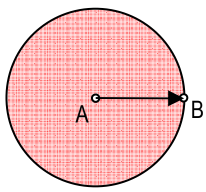
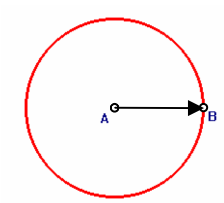
Bemerkung:
Die beiden Winkelhalbierenden stehen immer senkrecht aufeinander (➔ w_1 steht immer senkrecht auf w_2)!

Konstruktion:
Mit dem Zirkel beim Schnittpunkt von g und h einstecken, kleine Markierungen auf den beiden Geraden anbringen. Dann von diesen beiden Markierungen aus wieder mit gleicher Zirkelöffnung den Schnittpunkt bestimmen. Diesen mit dem Schnittpunkt der beiden Geraden verbinden.

1.7 Grenzen und Lösungsbereiche

Bei Punktmengen-Aufgaben bildet die konstruierte Punktmenge meistens eine Grenze. Dabei muss dann entschieden werden, ob diese Grenze noch zum Lösungsbereich dazugehört oder eben nicht. Entsprechend müssen wir natürlich der Frage der Lösungsbereiche einige Augenblicke widmen:

a) Lösungsbereiche nach Schlüsselwörtern definieren

Gesuchter Bereich im Beispiel von der Entfernung zweier Punkte (dies führt zur Punktmenge Kreislinie als Grenze)	*Grenze dabei?*	*Bild*
„Markiere alle Punkte, die von A <u>höchstens so weit entfernt</u> sind, wie B“	ja *(höchstens schliesst die Grenze ein)* ➔ *Die **Grenzlinie** (Punktmenge) mit Lösungsfarbe **markieren**.*	
„Alle Punkte, die von A <u>mindestens so weit entfernt</u> sind, wie B“	ja *(mindestens schliesst die Grenze ein)* ➔ *Die **Grenzlinie** (Punktmenge) mit Lösungsfarbe **markieren**.*	
„Alle Punkte, die von A <u>weiter entfernt</u> sind <u>als</u> B.“	nein *(weiter schliesst die Grenze aus)* ➔ *Die **Grenzlinie** (Punktmenge) **nicht** markieren*	
„Alle Punkte, die von A <u>weniger weit entfernt</u> sind, <u>als</u> B.“	nein *(weniger weit schliesst die Grenze aus)* ➔ *Die **Grenzlinie** (Punktmenge) **nicht** markieren*	
„Alle Punkte, die von A <u>genau so weit entfernt sind</u>, wie B“	ja *(genau heisst „ausschliesslich die Grenze“)* ➔ *Die **Grenzlinie** (Punktmenge) mit Lösungsfarbe **markieren***	

b) Schnittpunkte definieren: Gehören sie zur Lösung oder nicht?

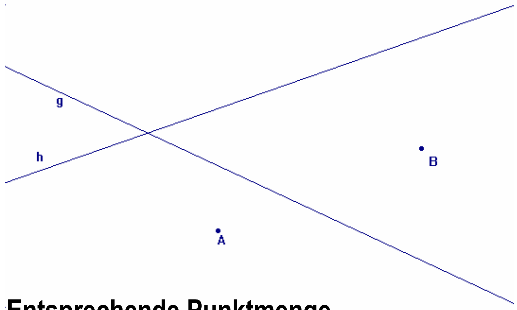
Natürlich können verschiedene Aufgaben auch kombiniert werden. Sobald Schnittpunkte entstehen, gilt die Abmachung:

Schnittpunkt gehört zur Lösung: Markieren mit einem Kreisli!

Schnittpunkt gehört nicht zur Lösung: Markieren mit einem Viereckli.

1.8 Typisches Vorgehen bei Aufgaben mit Punktmengen

Untenstehend eine Punktmengen-Aufgabe und das typische Vorgehen, wie man diese lösen kann. Der Lösungsprozess verläuft – wie so oft in Mathematik und Geometrie – in einzelnen Schritten. Man zerlegt das Problem in Teilprobleme. Und löst die dann einzeln. Am Schluss setzt man alles zusammen und findet die Lösung.



Am Beispiel der folgenden Aufgabe wird dies gezeigt:

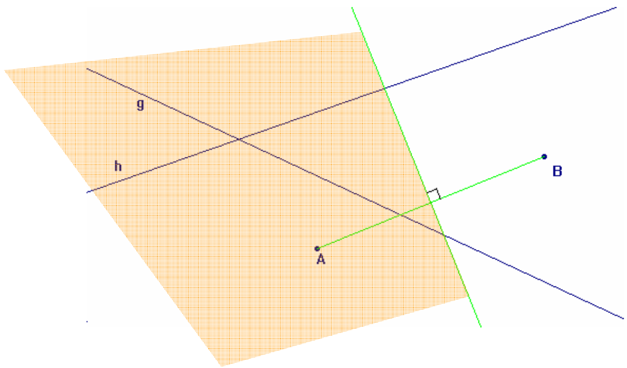
Gegeben sind zwei Punkte A und B, sowie die Geraden g und h. Konstruiere die Menge aller Punkte, die näher bei A als bei B liegen, von A höchstens 3cm entfernt sind und von h mindestens 2cm Abstand haben. Zudem liegen sie näher bei g als bei h.

a) Lösungsbereiche nach Schlüsselwörtern definieren

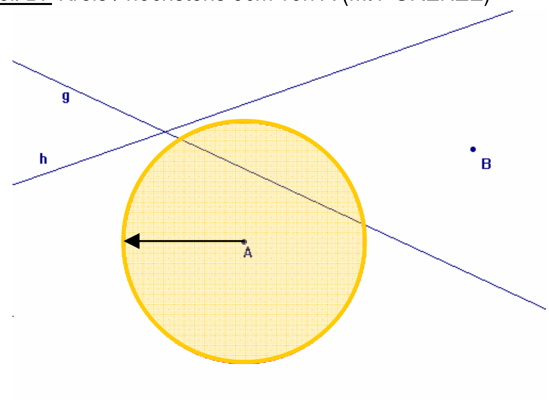
	Aufgabenteil / Schlüsselwort	Bedeutung → Entsprechende Punktmenge
A	*…die näher bei A als bei B liegen…*	Entfernung von 2 Punkten → **Mittelsenkrechte** von AB
B	*…von A höchstens 3cm entfernt sind…*	Entfernung von 1 Punkt → **Kreis** um A mit r=3cm
C	*…von h mindestens 2cm Abstand haben*	Abstand von einer Geraden → **Parallelenpaar** h_1, h_2
D	*…liegen sie näher bei g als bei h.*	Abstand von zwei Geraden → **Winkelhalbierende** von g, h

b) Mit Farben arbeiten und die einzelnen Gebiete zeichnen. Hier sind alle Gebiete zuerst einzeln, dann gemeinsam dargestellt.

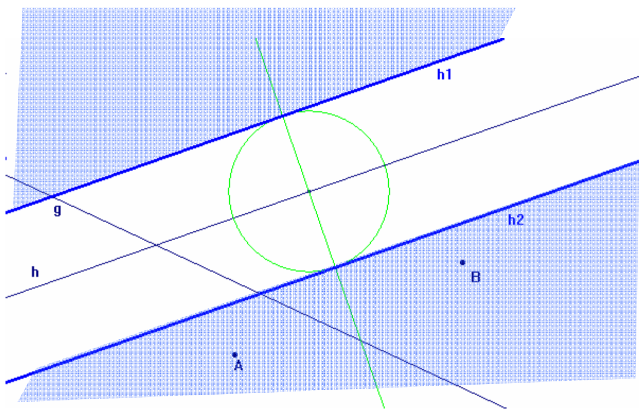
Teil A: Mittelsenkrechte / näher bei A (OHNE GRENZE)



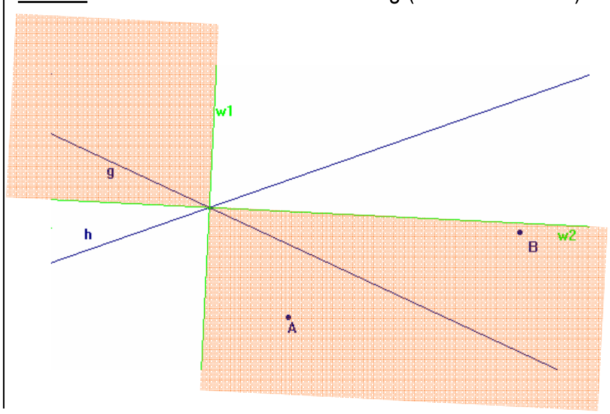
Teil B: Kreis / höchstens 3cm von A (MIT GRENZE)



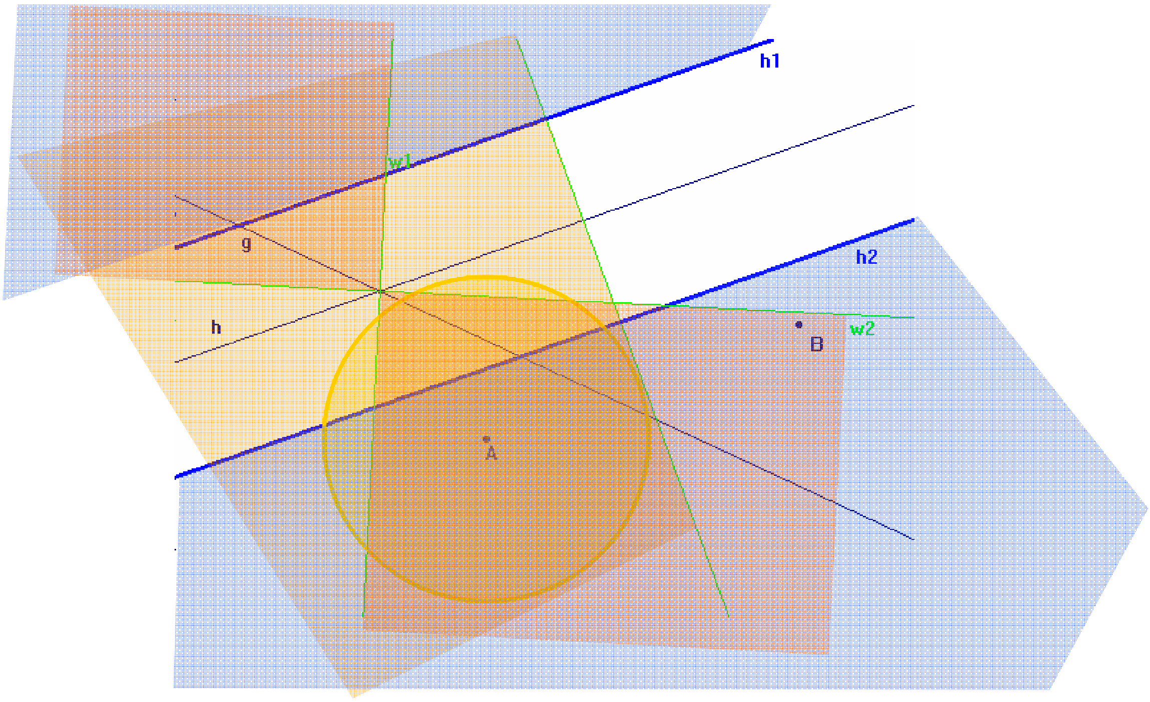
Teil C: Parallelenpaar / mindestens 2cm von h (MIT GRENZE)



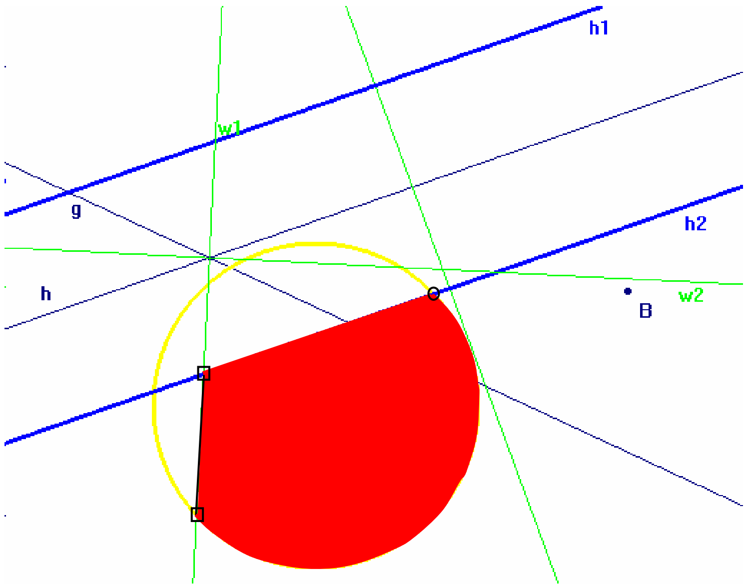
Teil D: Winkelhalbierende / näher bei g (OHNE GRENZE)



Zeichnen wir einmal alle Gebiete in der gleichen Zeichnung. Die Lösung liegt jetzt dort, wo sich ALLE Teillösungsgebiete überschneiden. Grafisch sieht das in etwa so aus.



Für die Entscheidung, ob die Schnittpunkte der einzelnen Bereiche zur Lösung gehören oder nicht, müssen wir immer schauen, ob beide Grenzen zur Lösung gehören oder nicht. Dann markieren wir entsprechend. Grenzstrecken, die zur Lösung gehören werden rot markiert, jeder Schnittpunkt wird entweder mit Kreili (gehört dazu) oder Viereckli (gehört nicht dazu) markiert. Die endgültige Lösung des Problems sieht also so aus:



Aufgaben “Punktmengen“:

1. **Gegeben sind die Punkte M und A mit $\overline{AM}$ = 50mm. Konstruiere die Menge aller Punkte, die näher bei M als bei A liegen, aber weniger als 35mm von A entfernt sind Z.**

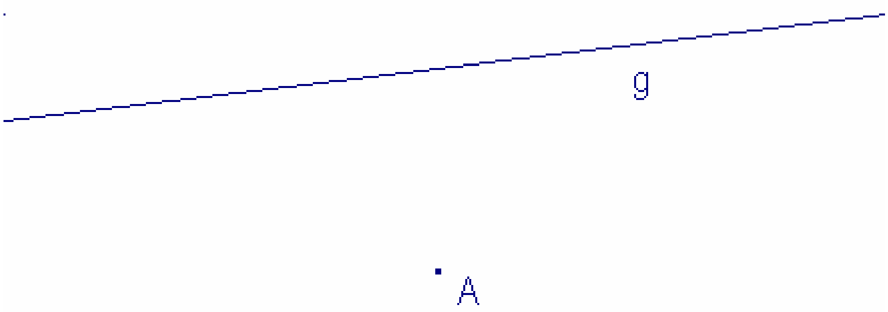
Konstruktion / Lösung

Problemanalyse → Punktmengen

Konstruktionsbericht:

2. **Gegeben sind die Gerade g und der Punkt A ein. Konstruiere jetzt die Menge aller Punkte, die von A mindestens 40mm Entfernung haben und von g höchstens einen Abstand von 15mm aufweisen.**

Konstruktion / Lösung

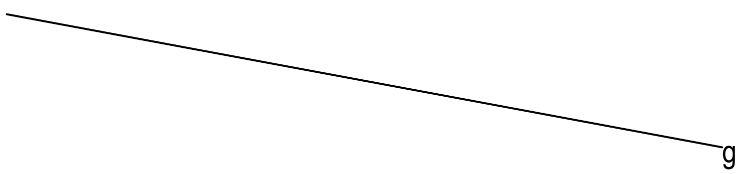


Problemanalyse → Punktmengen

Konstruktionsbericht:

3. **Gegeben sind die Geraden g und h, welche parallel zueinander sind und einen Abstand von 26mm haben. Zeichne zuerst die Gerade h und markiere dann die Menge aller Punkte, die von g und h gleichen Abstand haben.**

Konstruktion / Lösung



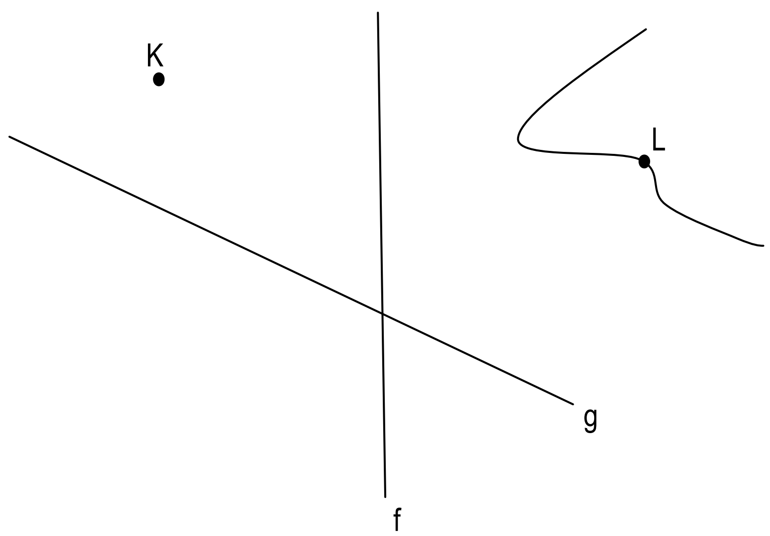
Problemanalyse → Punktmengen

Konstruktionsbericht:

4. Hannowart, der Vikinger hat ein kleines Problem: Er hat vor Jahren einen grossen Schatz vergraben, weiss jetzt aber leider nicht mehr genau wo. Nun möchte er wenigstens das Suchgebiet eingrenzen. Er weiss, dass sein Schatz in mindestens 25 Schritte vom Landepunkt L entfernt ist. Zudem ist er sich sicher, dass er seine Beute näher am Fluss f als am Fluss g verbuddelt hat. Zu guter Letzt ist der gute Vikinger sicher, dass er der Turm K mindestens so weit entfernt war vom Vergrabungsort wie der Landepunkt L. (Übrigens: Ein Schritt ist auf dem Plan 1mm lang..)

a. Markiere das Suchgebiet
b. Schreibe einen Konstruktionsbericht.

Konstruktion / Lösung



Problemanalyse → Punktmengen

Konstruktionsbericht:

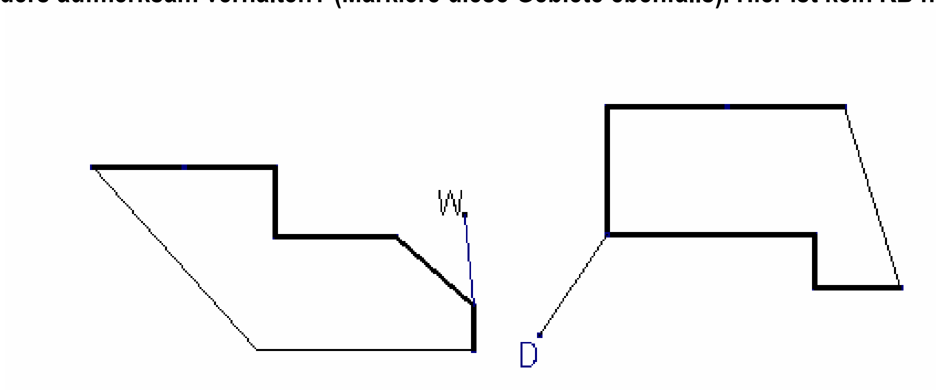
5. Zeichne die Punkte M_1 und M_2 (Entfernung = 6cm) ein. Zeichne den Kreis k_1 (M_1, 3cm) und den Kreis k_2 (M_2, 2cm) ein. Suche jetzt alle Punkte, die von k_1 mindestens 0.5cm von k_2 höchstens 2 cm Abstand haben und die näher bei M_1 als bei M_2 liegen.

Konstruktion / Lösung

Problemanalyse → Punktmengen

Konstruktionsbericht:

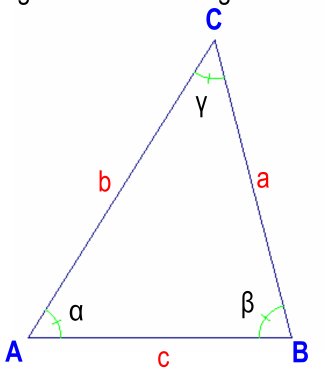
6. Hund „Wuffi“ möchte das Schaf „Dolly“ beissen. Beide sind aber an einer Kette angebunden, die sich entlang der dick ausgezogenen Linie frei bewegen kann. Markiere die Gebiete, in welchen sich Dolly bewegen kann mit einer Farbe, die Gebiete, in welchen Wuffi wütet mit einer anderen. In welchen Gebieten muss sich Schaf „Dolly“ besonders aufmerksam verhalten? (Markiere diese Gebiete ebenfalls). Hier ist kein KB nötig.



2. Dreiecke

2.1 Bezeichnungen und Begriffe

Im allgemeinen Dreieck gelten die folgenden Bezeichnungen:



A, B, C:	Eckpunkte des Dreiecks
a, b, c:	Dreiecksseiten (AB = c; BC = a, AC = b)
α, β, γ:	Winkel im Dreieck (α = BAC, β = ABC, γ = BCA)

2.2 Spezielle Bezeichnungen von Dreiecken

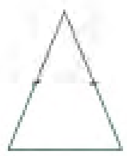
Natürlich sind nicht alle Dreiecke gleich in ihrem Aussehen. So richtet sich die Bezeichnung von Dreiecken nach gewissen Eigenheiten:

a) Bezeichnung von Dreiecken nach ihrer Seitenlänge:

Werden nur die Seiten betrachtet, können sie entweder alle verschieden lang sein. Aber es können auch entweder zwei oder sogar alle drei Seiten gleich lang sein. Entsprechend bezeichnet man die Dreiecke wie folgt:

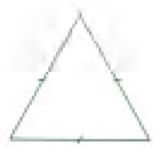
ungleichseitig (allgemein)

keine gleich langen Seiten



gleichschenklig

zwei gleich lange Seiten (und zwei gleiche Winkel)

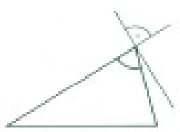


gleichseitig

drei gleich lange Seiten (und drei gleiche Winkel)

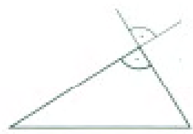
b) Bezeichnung von Dreiecken nach ihren Winkeln:

Werden nur die Winkel betrachtet, so können entweder alle Winkel kleiner als 90° sein oder es kann einer von drei Winkeln gleich oder grösser 90° sein. Entsprechend teilt man die Dreiecke ein:



spitzwinklig

alle Winkel kleiner als 90°



rechtwinklig

ein Winkel ist gleich 90°

stumpfwinklig

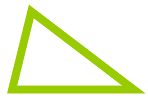
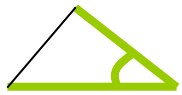
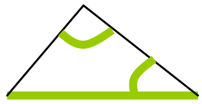
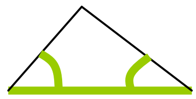
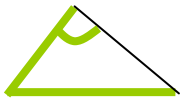
ein Winkel ist grösser als 90°

2.3 Wann ist ein Dreieck konstruierbar?

Ein Dreieck lässt sich unter gewissen Umständen konstruieren. Allerdings müssen genügend Angaben vorliegen und diese Angaben müssen ein das Dreieck zweifelsfrei definieren. Man spricht davon, dass **ein Dreieck bestimmt ist** (dann kann man es konstruieren) oder es ist eben nicht bestimmt (und lässt sich nicht eindeutig zeichnen). **Ist ein Dreieck eindeutig bestimmt, gibt es genau ein Dreieck, dass diesen Angaben entspricht (darum „eindeutig“)**. Ist es nicht eindeutig bestimmt, gibt es entweder mehrere Dreiecke, die diesen Angaben entsprechen oder – im Extremfall – es lässt sich gar kein Dreieck zeichnen. Daher gibt es die sogenannten „Bestimmungssätze“:

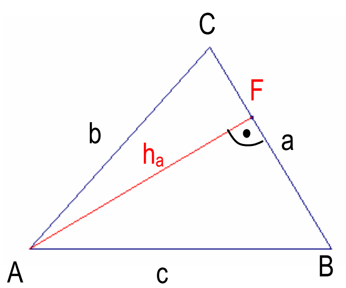
Die einzelnen Bestimmungssätze sind natürlich nur dann erkennbar, wenn das Dreieck vor der Konstruktion sauber und gross SKIZZIERT wird. Eine Skizze ist eine Schaufigur, die zur Aufgabenlösung und – Planung dient. Die Skizze hat die ungefähre Form der Lösung ist aber nicht in korrekter Grösse dargestellt. Dafür zeichnen wir mit grüner Farbe jeweils die gegebenen Grössen ein. (So sehen wir sofort, ob das Dreieck bestimmt ist oder nicht..)

Die Bestimmungssätze lauten:

	Satz:	*Kurzformel:*	*Skizze:*
1.	Ein Dreieck ist durch drei Seiten eindeutig bestimmt.	SSS	
2.	Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmt	SWS	
3.	Ein Dreieck ist durch eine Seite und zwei Winkel bestimmt. *(Hier gibt es zwei Varianten)*	SWW WSW	 
4.	Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der grösseren Seite bestimmt.	SsW	

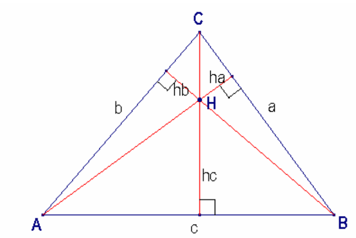
2.4 Die Höhe im Dreieck

Als **Höhe** bezeichnet man die **Lotstrecke auf eine Dreiecksseite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt**.



Bezeichnung: h_a: Höhe auf die Seite a (und durch den Eckpunkt A)
h_b: Höhe auf die Seite b (und durch den Eckpunkt B)
h_c: Höhe auf die Seite c (und durch den Eckpunkt C)

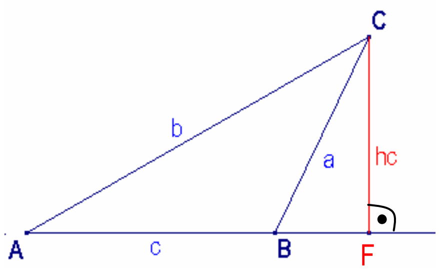
F: Höhenfusspunkt (Schnittpunkt der Höhe mit der Dreiecksseite)



Alle Höhen schneiden sich im Höhenschnittpunkt H.

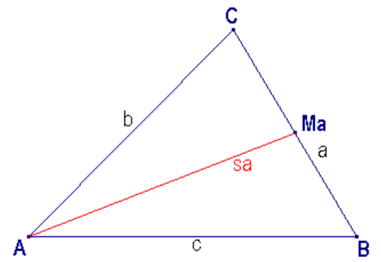
Die Höhe wird für die Konstruktion häufig verwendet. Die Grundkonstruktion mit Höhen findet sich unter dem Punkt „Konstruktionshilfen"

Speziell: **Die Höhe kann auch ausserhalb des Dreiecks verlaufen.** In diesem Fall verlängert man ganz einfach die Dreiecksseite, um den Höhenfusspunkt zu finden.



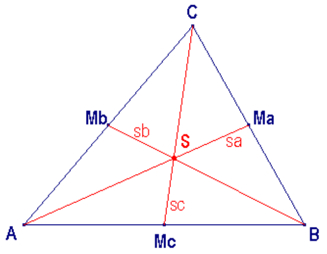
2.5 Die Schwerlinie im Dreieck

Als **Schwerlinie (Seitenhalbierende)** bezeichnet man die **Verbindung der Seitenmitte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt.**



Bezeichnung: s_a: Schwerlinie der Seite a
s_b: Schwerlinie der Seite b
s_c: Schwerlinie der Seite c

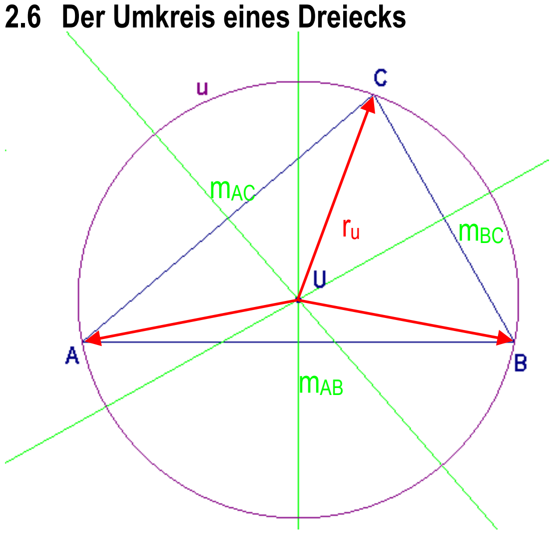
M_a: Mittelpunkt der Seite a
M_b: Mittelpunkt der Seite b
M_c: Mittelpunkt der Seite c



Alle Schwerlinien schneiden sich im Schwerpunkt S.
Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1

Auch die Schwerlinien spielen in Konstruktionsaufgaben eine Rolle. Auch hier finden wir die entsprechende Grundkonstruktion unter dem Punkt „Konstruktionshilfen“

2.6 Der Umkreis eines Dreiecks



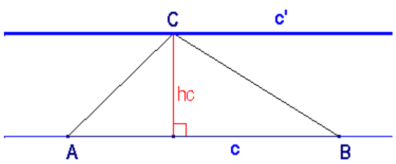
Alle Eckpunkte eines Dreieckes liegen auf dem Umkreis. Der Umkreismittelpunkt hat also die Eigenschaft, dass er von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt ist.

Der Umkreismittelpunkt U ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten.

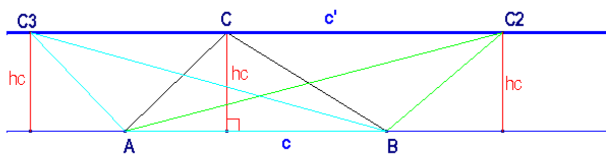
Der Umkreisradius u hat die Länge der Entfernung von U zu einem der drei Eckpunkte. Es gilt UA = UB = UC.

3. Konstruktionshilfen

3.1 Arbeiten mit der Höhe: Der Höhenstreifen



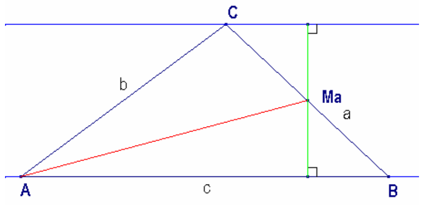
Die Höhe ist die senkrechte Verbindung zwischen Dreiecksseite und ihrer gegenüberliegenden Ecke. Diese Definition entspricht der Formulierung: **„Der Eckpunkt hat von der gegenüberliegenden Dreiecksseite den Abstand h.“** So ist der Eckpunkt nichts anderes als ein spezieller Punkt der Punktmenge, **die von einer Gerade (Dreiecksseite) einen bestimmten Abstand hat. Die Punktmenge, die diese Punkte liefert ist das Parallelenpaar.** Im Fall des Dreiecks verwenden wir aber nicht zwei, sondern nur eine Parallele (sonst erhalten wir das Dreieck und sein Spiegelbild bezüglich der Dreiecksseite).

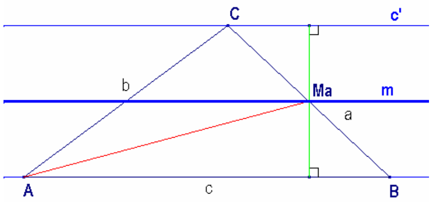


Die **Parallele zur Dreiecksseite im Abstand h heisst „Höhenstreifen“.** Bei Dreiecken mit gleicher Höhe hc liegen die Eckpunkte C alle auf dem Höhenstreifen c’

Höhenstreifen: Bei gegebener Höhe liegt die zugehörige Ecke auf einer Parallelen zur gegenüberliegenden Seite!

3.2 Arbeiten mit der Schwerlinie (Seitenhalbierenden): Die Mittelparallele



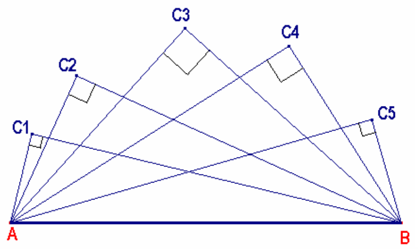


Die Schwerlinie verbindet Seitenmittelpunkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt. Interessant für die Konstruktion ist eigentlich vor allem der Seitenmittelpunkt. Dieser liegt ja genau in der Mitte der Dreiecksseite, das heisst, er hat von **beiden Eckpunkten gleiche Entfernung**. Zeichnet man dazu die beiden Parallelen (siehe Höhenstreifen), so liegt der **Seitenmittelpunkt so, dass er von beiden Parallelen den gleichen Abstand hat.**

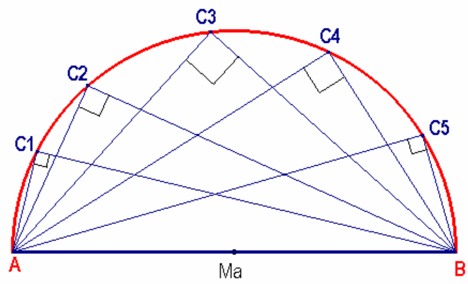
Der Seitenmittelpunkt M **liegt auf der Mittelparallelen m des Höhenstreifens (hier Höhenstreifen h_c)**

Schwerlinie: Der Seitenmittelpunkt einer Dreiecksseite liegt auf der Mittelparallele des passenden Höhenstreifens!

3.3 Arbeiten mit einem rechten Winkel: Der Thaleskreis



Wenn wir zahlreiche rechtwinklige Dreiecke über der gleichen Strecke zeichnen und die Punkte C (beim rechten Winkel) betrachten, so können wir feststellen, dass diese Punkte alle auf einer Kreislinie liegen. Kreismittelpunkt ist dabei der Mittelpunkt der ursprünglichen Strecke (Hypothenuse) AB.



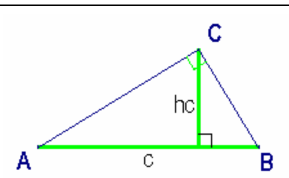
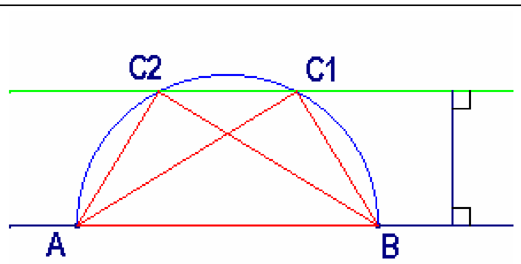
Bei rechtwinkligen Dreiecken bewegt sich die der längsten Seite gegenüberliegende Ecke auf einer Kreislinie über der längsten Seite. Diese Kreislinie heisst <u>Thaleskreis.</u>

3.4 Die Kombination verschiedener Konstruktionshilfen

Die Kombination verschiedener Grundkonstruktionen führt meistens zum Ziel. Zum Beispiel können wir das untenstehende Beispiel lösen:

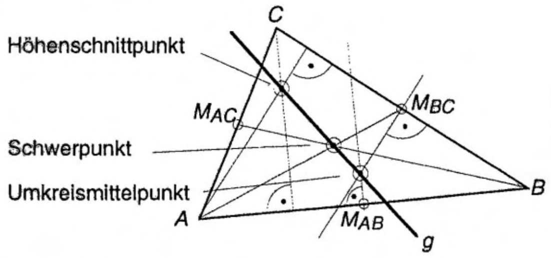
„Konstruiere das rechtwinklige Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) mit $c = 45mm$, $h_c = 20mm$“

Wie jede Konstruktion beginnen wir mit der Skizze und erstellen danach einen Lösungsplan (Konstruktionsbericht).

<table>
<tr><td>Skizze:</td><td>Konstruktionsbericht (Lösungsplan):</td></tr>
<tr><td>
</td><td rowspan="3">1. Seite c zeichnen
2. Höhenstreifen h_c zeichnen
(Weil h_c und c gegeben sind)
3. Thaleskreis über der Seite c
(Weil der rechte Winkel bei der Ecke C liegt und c längste Seite ist)
4. Die Schnittpunkte des Thaleskreis mit dem Höhenstreifen ergeben die beiden Punkte C_1 und C_2.
5. Dreiecke zeichnen.</td></tr>
<tr><td>Konstruktion:</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

4. Dreiecke: Spezielles:

4.1 Ausgezeichnete Punkte im Dreieck:

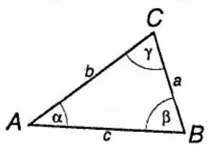


Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt und Schwerpunkt liegen auf einer Geraden.

4.2 Dreiecke - Zusammenfassung:

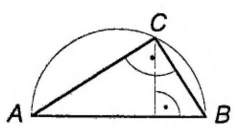
Das ungleichseitige Dreieck

Begriffe: Ecken: A,B und C
Seiten: a, b und c
Höhen, Seitenhalbierende
Winkel: α, β und γ



Eigenschaften: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt liegen auf einer Geraden.

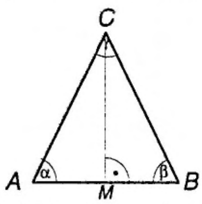
Das rechtwinklige Dreieck



Begriffe: Hypotenuse: AB
Katheten: BC, AC
Hypotenusenhöhe

Eigenschaften:
- Ecke C liegt auf dem Thaleskreis über AB.
- Kathetenhöhen und Katheten fallen zusammen, d.h. der Höhenschnittpunkt liegt auf C.

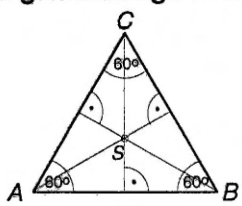
Das gleichschenklige Dreieck



Begriffe: Spitze: C
Basis: AB
Schenkel: BC, AC
Basiswinkel: α, β
Spitzenwinkel: γ
Basishöhe: MC

Eigenschaften:
- **Achsensymmetrisch** bezüglich der Basishöhe.

Das gleichseitige Dreieck

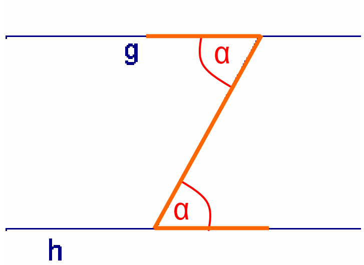


Begriffe: keine zusätzlichen

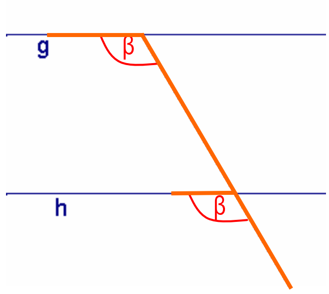
Eigenschaften:
- Höhen und Schwerlinien fallen zusammen.
- Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt fallen zusammen.
- **Achsensymmetrisch** bezüglich der drei Höhen.
- **Drehsymmetrisch** bezüglich der obigen Punkte (Drehwinkel 60°).

5. Winkel im Dreieck

5.1 Winkel an Parallelen



Z-Winkel sind gleich gross
(*Wechselwinkel an Parallelen)*

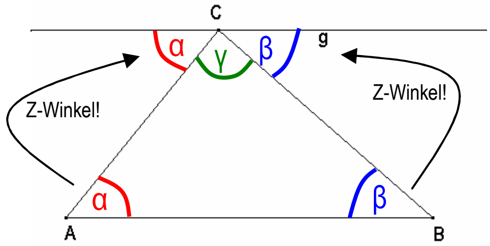


F-Winkel sind gleich gross
(*Stufenwinkel an Parallelen)*

5.2 Die Winkelsumme im Dreieck

Die Summe aller drei Winkel im Dreieck beträgt immer 180°. Dies ist eine Grundregel der Geometrie und gilt für jedes beliebige Dreieck.

Nachfolgend findet sich der Beweis für diese Behauptung:



Durch die Z-Winkel-Überlegung finden wir die Winkel an der Parallelen g zur Grundseite AB. So sehen wir schon rein optisch, dass die Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ in ihrer Summe 180° ergeben.

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°

Aufgaben "Dreiecke":

1. Konstruiere aus den folgenden Angaben die Dreiecke ABC:

a) AC = 39 mm
AB = 66 mm
BC = 45 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

b) c = 5.4 cm
a = 3.9 cm
b = 4.2 cm

Skizze / KB:

Konstruktion:

c) AC = 56mm
AB = 65mm
α = 120°

Skizze / KB:

Konstruktion:

d) AB = 68mm
α = 60°
h_c = 41mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

e) AB = 64mm
$\alpha = 56°$
$\beta = 35°$

Skizze / KB:

Konstruktion:

f) AC = 48mm
AB = 45mm
$\gamma = 60°$

Skizze / KB:

Konstruktion:

g) AC = 65mm
AB = 63mm
$\beta = 60°$

Skizze / KB:

Konstruktion:

h) AC = 44 mm
$\gamma = 80°$
hc = 40 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

i) $\alpha = 60°$
$\beta = 45°$
$h_c = 43$ mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

j) b = 41 mm
$\alpha = 60°$
$h_b = 35$mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

k) AB = 40 mm
BC = 50 mm
h_c = 30 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

l) BC = 35mm
AC = 45 mm
h_c = 30mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

m) BC = 30 mm
α = 60°
h_c = 28 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

n) BC = 46 mm
β = 45°
s_a = 50 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

o) AB = 60mm
AC = 40mm
s_c = 35 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

p) AB = 30 mm
α = 30°
s_b = 40 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

q) $AB = 60mm$
$h_c = 25mm$
$\gamma = 90°$

Skizze / KB:

Konstruktion:

r) $AB = 53$ mm
$h_c = 35$ mm
$h_a = 45$ mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

s) $AC = 54$ mm
$h_a = 48$ mm
$h_c = 28$ mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

t) $\beta = 60°$
$h_c = 45$ mm
$h_b = 47$ mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

u) $BC = 50mm$
$h_a = 19mm$
$\alpha = 90°$

Skizze / KB:

Konstruktion:

v) $AB = 61mm$
$h_b = 50mm$
$h_c = 40mm$

Skizze / KB:

Konstruktion:

w) $AB = 50mm$
$s_a = 43\ mm$
$h_b = 29\ mm$

Skizze / KB:

Konstruktion:

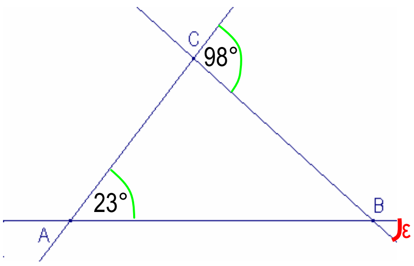
x) $BC = 42\ mm$
$s_a = 59\ mm$
$h_b = 39\ mm$

Skizze / KB:

Konstruktion:

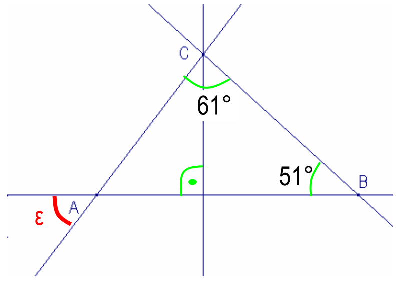
2. Berechne die gesuchten Winkel:

a)



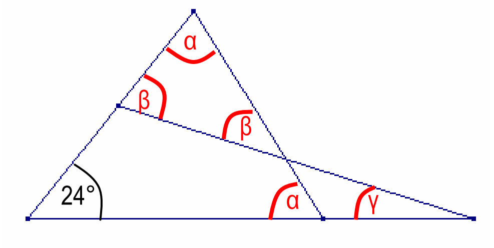
Berechne den Winkel ε.

b)



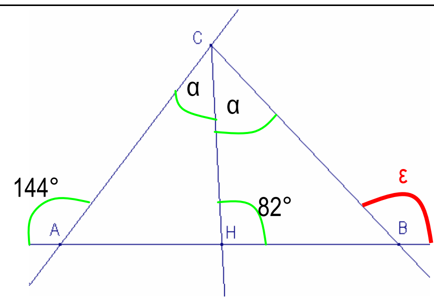
Berechne den Winkel ε.

c)



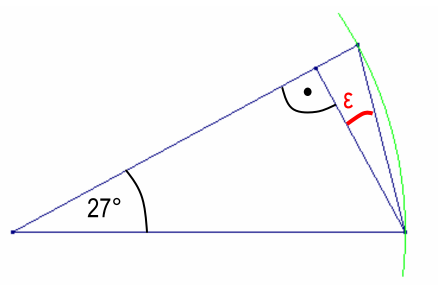
Berechne die Winkel α, β, γ.

d)



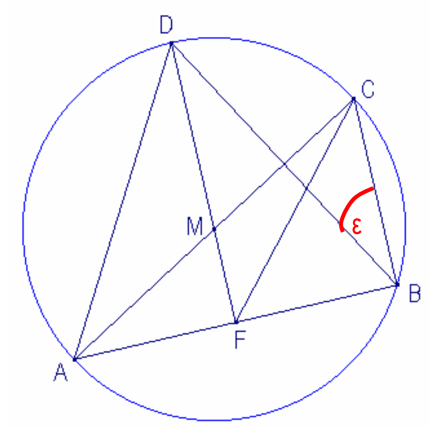
Berechne den Winkel ε.

e)



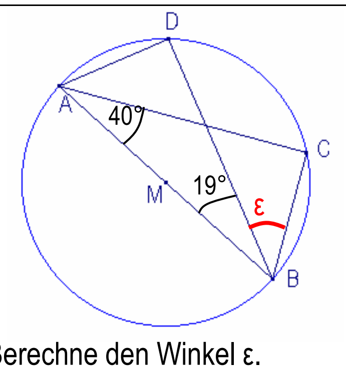
Berechne den Winkel ε.

f)



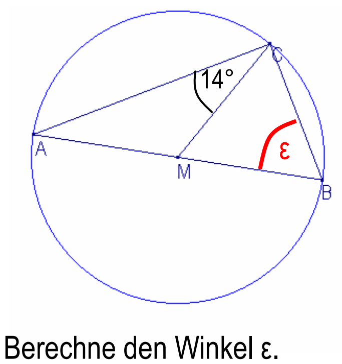
Berechne den Winkel ε.

g)



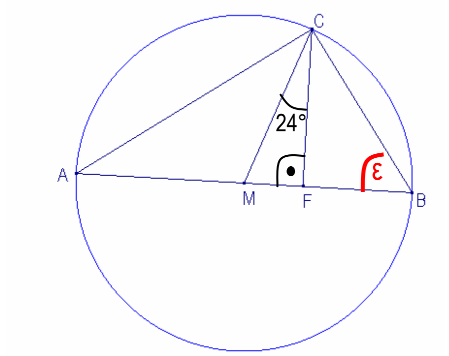
Berechne den Winkel ε.

h)



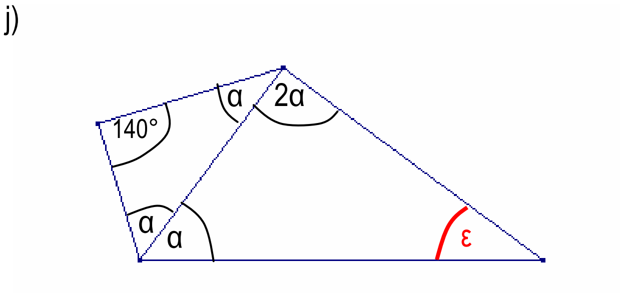
Berechne den Winkel ε.

i)



Berechne den Winkel ε.

j)



Berechne den Winkel ε.