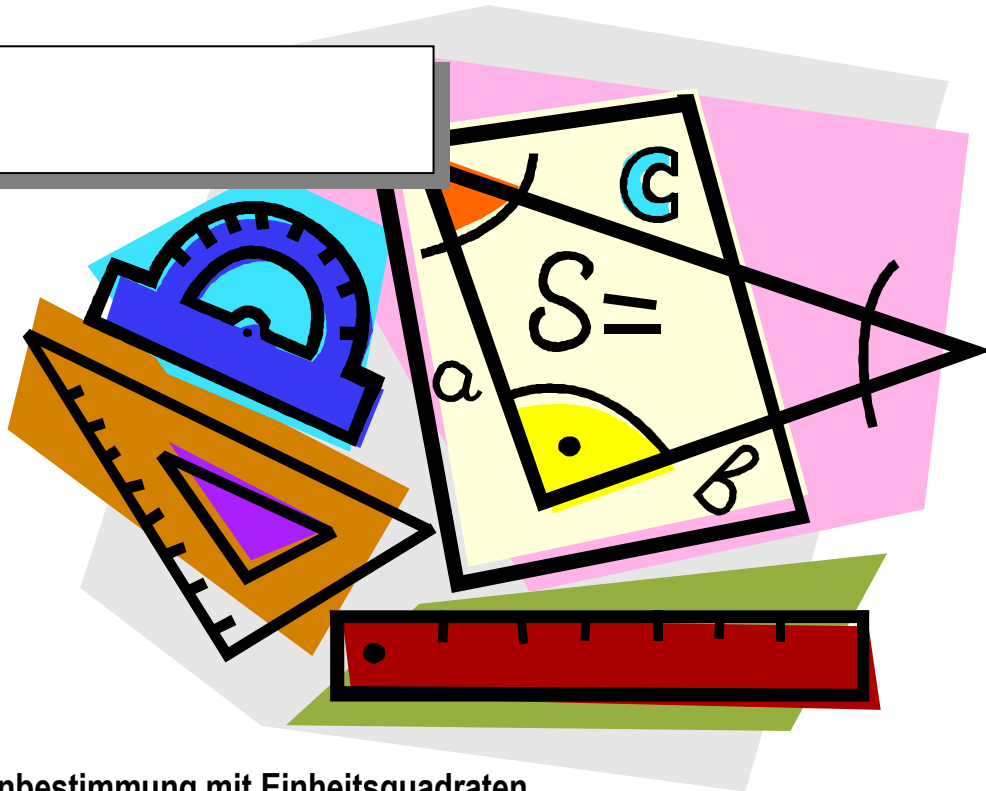


Geometrie-Dossier

Flächenberechnung

Name:




Inhalt:


- Flächenbestimmung mit Einheitsquadraten
- Flächenberechnung in Dreiecken
- Flächenberechnung in speziellen Vierecken
- Flächenberechnung in allgemeinen Vielecken

Eine farbige Version zum Download findest du im Internet unter www.andiraez.ch/schule

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  gekennzeichnet

schwierigere Aufgaben sind mit einem  gekennzeichnet.

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

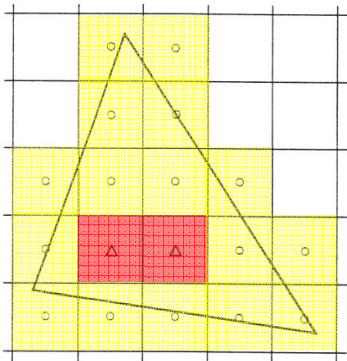
Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten: Konstruktionen: Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)
 Skizzen: Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.
 Sichtbarkeit: In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.

1. Flächenberechnung durch Einheitsquadrate

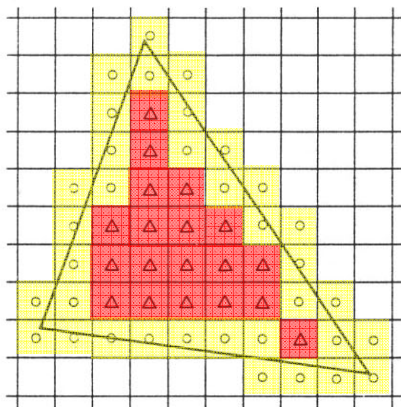
Eine Fläche kann mittels Einheitsquadraten auf möglichst genaue Art bestimmt werden. Je nach Grösse dieser Einheitsquadrate wird die Fläche genauer oder weniger genau angenähert. Im Folgenden ist diese Überlegung gezeigt:

1. 10-mm-Gitter



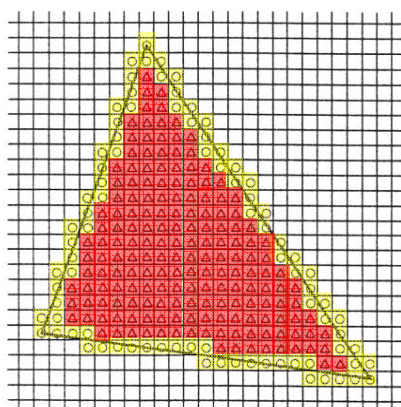
■ : 2 cm² liegen vollständig im Dreieck
■ : 16 cm² liegen zum Teil im Dreieck
 Flächeninhalt A des Dreiecks:

2. 5-mm-Gitter



■ : 4,75 cm² 19 · 0,25 cm² liegen vollständig im Dreieck
■ : 8,75 cm² 35 · 0,25 cm² liegen zum Teil im Dreieck
 Flächeninhalt A des Dreiecks:
 4,75 cm² < A < 13,5 cm²

3. 2-mm-Gitter



■ : 7,16 cm² 179 · 0,04 cm² liegen vollständig im Dreieck
■ : 3,44 cm² 86 · 0,04 cm² liegen zum Teil im Dreieck
 Flächeninhalt A des Dreiecks:
 7,16 cm² < A < 10,6 cm²

In der Zeichnung mit einem Einheitsquadrat von 1cm² können wir feststellen, dass genau 2 solche Quadrate (rot markiert) im Dreieck liegen, dagegen sind 16 Einheitsquadrate in irgend einer Form angeschnitten, also zum Teil im Dreieck enthalten.

Wir können also feststellen, dass das Dreieck ein Fläche hat, die sicher grösser ist als 2 Einheitsquadrate (2cm²), auf jeden Fall auch kleiner als 18 Einheitsquadrate (18 cm², 2 ganze und 16 angeschnittene).

⇒ **Diese Methode scheint nicht sehr genau zu sein...**

Um eine genauere Berechnung der Fläche zu bekommen, können wir die Einheitsquadrate verkleinern. In dieser Zeichnung mit einem Einheitsquadrat von 0.25cm² (da die Länge einer Quadratseite 0.5 cm beträgt, ist die Fläche 0.5 cm • 0.5 cm = 0.25 cm²) können wir feststellen, dass genau 19 solche Quadrate (rot markiert) im Dreieck liegen, dagegen sind 35 Einheitsquadrate in irgend einer Form angeschnitten, also zum Teil im Dreieck enthalten.

Wir können also aussagen, dass das Dreieck ein Fläche hat, die sicher grösser ist als 19 Einheitsquadrate (4.75 cm²), auf jeden Fall auch kleiner als 54 Einheitsquadrate (13.5 cm², 19 ganze und 35 angeschnittene).

⇒ **Diese Methode ist zwar etwas besser, aber noch immer ungenau.**

Mit dieser noch feineren Einteilung können wir den Flächeninhalt des Dreieckes noch besser annähern. Die Einheitsquadrate werden kleiner, die untere und die obere Grenze kommen immer näher zusammen.

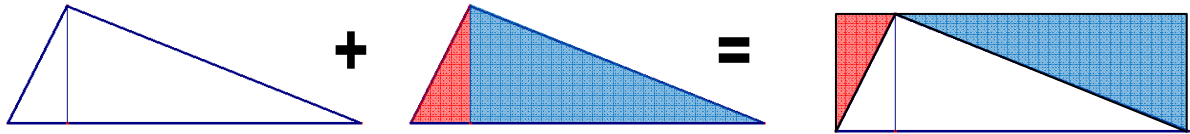
⇒ **Je feiner die Einheitsquadrate, desto besser die Aussage über die Fläche.**

Trotzdem müssen wir eine bessere Methode finden, um die Fläche eines Dreiecks schnell, einfach und eindeutig zu berechnen....

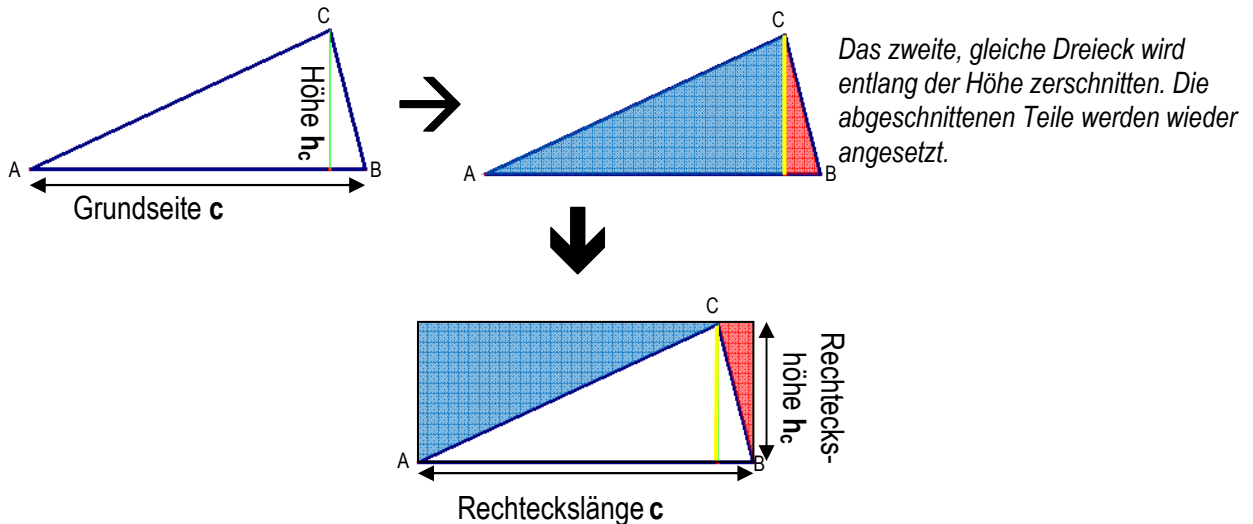
2. Flächenberechnung in Dreiecken

2.1. Aus Dreiecken Rechtecke machen.

Aus zwei Dreiecken kann man problemlos ein Rechteck basteln. Man darf die Dreiecke ja zerschneiden, die Teile neu anordnen und kann so dafür sorgen, dass man ein schönes, korrektes Rechteck bekommt. Dies sieht dann zum Beispiel mit rechtwinkligen Dreiecken so aus:



Wie man unschwer aus der Zeichnung entnehmen kann, bilden zwei gleich grosse Dreiecke ein Rechteck. Diese Überlegung funktioniert auch bei allgemeinen Dreiecken:



Wir können also feststellen: Ein Dreieck ist ein halbes Rechteck.

Fläche des Rechtecks: Länge mal Breite ($c \cdot h_c$)

Fläche des Dreiecks: Grundseite mal zugehörige Höhe durch 2 ($c \cdot h_c : 2$)

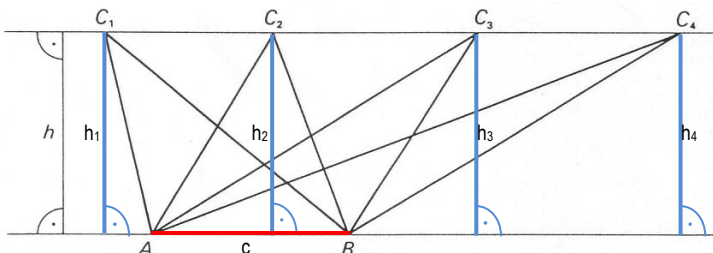
Es gilt somit für jedes Dreieck : $A_{\Delta} = (\text{Grundseite} \cdot \text{zugehörige Höhe}) : 2 = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$

Da es keine Rolle spielt, entlang welcher Höhe das Dreieck zerschnitten wird gilt logischerweise:

$$A_{\Delta} = (\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}) : 2 = (a \cdot h_a) : 2 = (b \cdot h_b) : 2 = (c \cdot h_c) : 2$$

2.2. Dreiecke mit gleicher Höhe.

Wenn wir verschiedene Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe betrachten, so wird uns klar, dass deren Fläche – trotz verschiedenem Aussehen gleich sein muss. Denn Grundseite mal Höhe durch 2 ist unabhängig von der Form des Dreieckes.

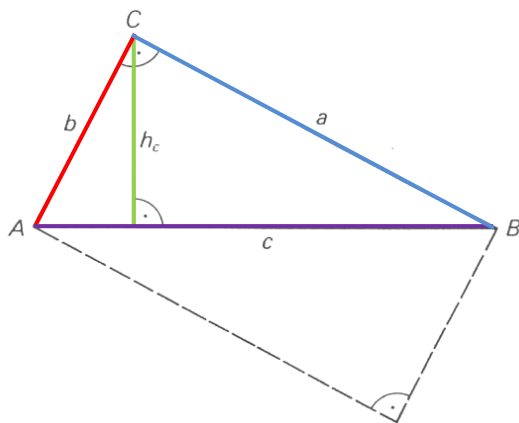


Weil $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_c$ gilt für alle Dreiecke:

$$A_{\Delta} = (\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}) : 2 = (c \cdot h_c) : 2$$

Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher (zugehöriger) Höhe haben immer den gleichen Flächeninhalt

2.3. Spezialfall „rechtwinklige Dreiecke“



Im rechtwinkligen Dreieck kann die Fläche wie gewohnt berechnet werden:

$$A_{\Delta} = (\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}) : 2 = (c \cdot h_c) : 2$$

Die spezielle Eigenschaft der Seiten a und b allerdings ist die, dass die Seite a gleichzeitig die Höhe h_b ist (die Seite a steht senkrecht auf der Seite b und geht durch den Eckpunkt B) Und ebenso ist die Seite b gleichzeitig die Höhe h_a .

Somit kann die Fläche bei rechtwinkligen Dreiecken auch so berechnet werden:

$$A_{\Delta} = (\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}) : 2 = (a \cdot h_a) : 2 = (b \cdot h_b) : 2$$

oder in Kurzform: $A_{\Delta} = (a \cdot b) : 2$
--

Im rechtwinkligen Dreieck sind die beiden an den rechten Winkel angrenzenden Seiten (=Katheten) jeweils Grundseite und zugehörige Höhe.



Aufgaben "Flächenberechnung in Dreiecken":

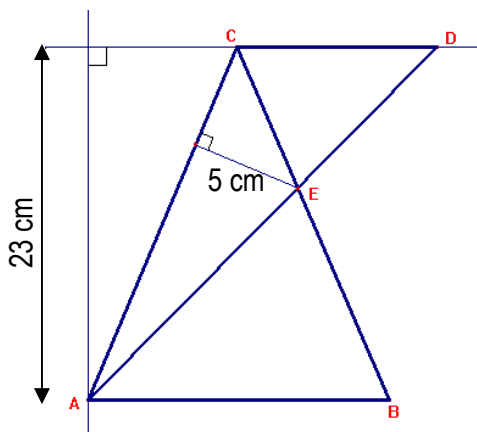
1. Konstruiere ein Dreieck mit $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$. Berechne danach die Fläche dieses Dreiecks.



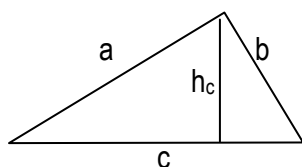
2. Berechne die Fläche eines Dreiecks mit der Höhe $h_b = 15 \text{ cm}$ und der Seite $b = 20 \text{ cm}$.



6. Berechne die Fläche des Dreiecks CDE ($CD = 8 \text{ cm}$, $AB = 12 \text{ cm}$, $AC = 27 \text{ cm}$)

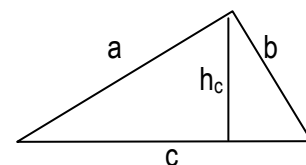


7. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Seite $c = 20 \text{ cm}$ und die Höhe $h_c = 11 \text{ cm}$. Berechne die Länge der Strecke b , wenn die Strecke $a = 10 \text{ cm}$.



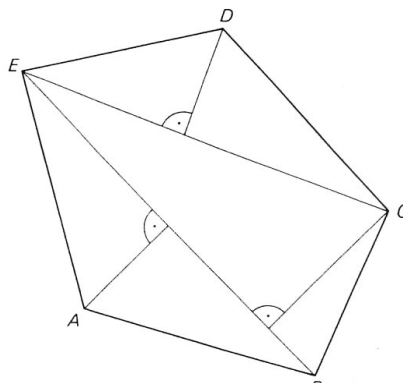
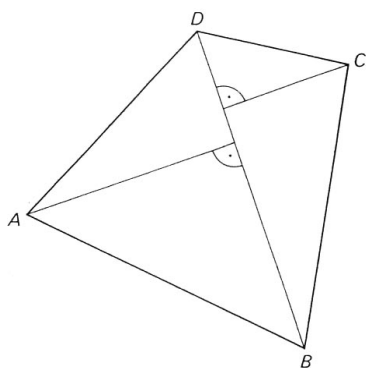
8. Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Flächeninhalt von 200 cm^2 . Berechne

- die Seite a , wenn die Seite $b = 50 \text{ cm}$ und $c = 60 \text{ cm}$
- die Seite b , wenn die Seite $a = 10 \text{ cm}$ und $c = 60 \text{ cm}$
- die Höhe h_c , wenn die Seite $a = 15 \text{ cm}$ und $c = 20 \text{ cm}$

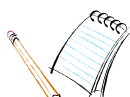


4. Flächenberechnung in allgemeinen Vielecken (Fläche im n-Eck)

Die Fläche von beliebigen Vielecke (n-Ecke) kann durch Zerlegung in Dreiecke problemlos berechnet werden:



Die Fläche von jedem beliebigen n-Eck kann durch geeignete Unterteilung in Dreiecke ohne Schwierigkeiten berechnet werden.

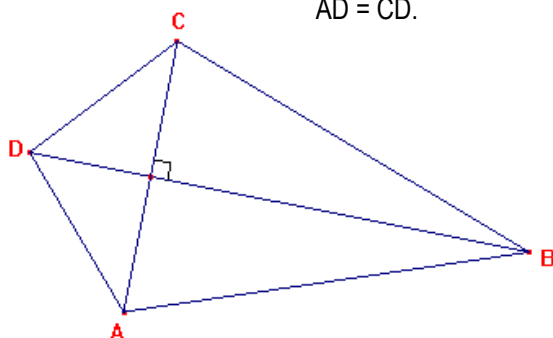


Aufgaben "Flächenberechnung in Vierecken und allgemeinen Vierecken":

1. Berechne im Drachenviereck ABCD den Flächeninhalt A.

Gegeben: AC = 24cm
BD = 100cm
AD = CD.

Gesucht: Fläche A (in cm²)



2. Berechne den Inhalt der Fläche ABCD

Gegeben: AB = 15 cm
CD = 7 cm
CD // AB.

