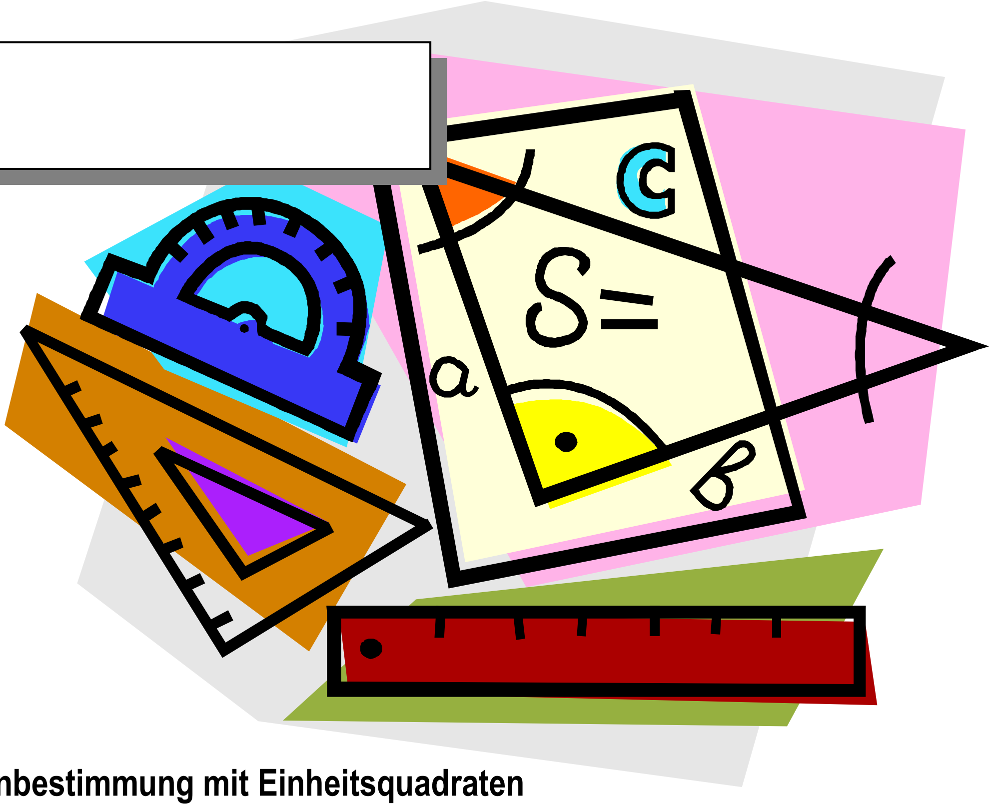
Geometrie-Dossier
Flächenberechnung

Name:



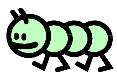
Inhalt:

- **Flächenbestimmung mit Einheitsquadraten**
- **Flächenberechnung in Dreiecken**
- **Flächenberechnung in speziellen Vierecken**
- **Flächenberechnung in allgemeinen Vielecken**

Eine farbige Version zum Download findest du im Internet unter www.andiraez.ch/schule

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

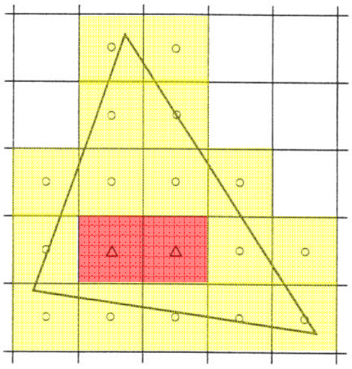
Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*
	Sichtbarkeit:	*In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.*

1. Flächenberechung durch Einheitsquadrate

Eine Fläche kann mittels Einheitsquadraten auf möglichst genaue Art bestimmt werden. Je nach Grösse dieser Einheitsquadrate wird die Fläche genauer oder weniger genau angenähert. Im Folgenden ist diese Überlegung gezeigt:

1. 10-mm-Gitter



: 2 cm² liegen vollständig im Dreieck

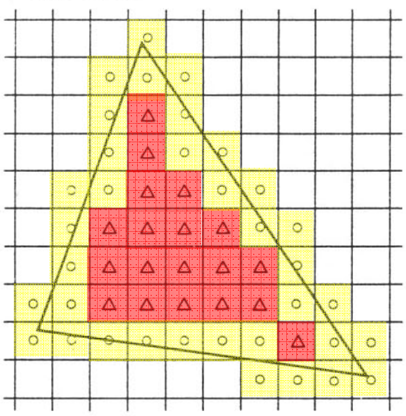
: 16 cm² liegen zum Teil im Dreieck

Flächeninhalt *A* des Dreiecks:

In der Zeichung mit einem Einheitsquadrat von 1cm² können wir feststellen, dass genau 2 solche Quadrate (rot markiert) im Dreieck liegen, dagegen sind 16 Einheitsquadrate in irgend einer Form angeschnitten, also zum Teil im Dreieck enthalten.
Wir können also feststellen, dass das Dreieck ein Fläche hat, die sicher grösser ist als 2 Einheitsquadrate (2cm²), auf jeden Fall auch kleiner als 18 Einheitsquadrate (18 cm², 2 ganze und 16 angeschnittene).

⇨ **Diese Methode scheint nicht sehr genau zu sein…**

2. 5-mm-Gitter



: 4,75 cm² 19 · 0,25 cm² liegen vollständig im Dreieck

: 8,75 cm² 35 · 0,25 cm² liegen zum Teil im Dreieck

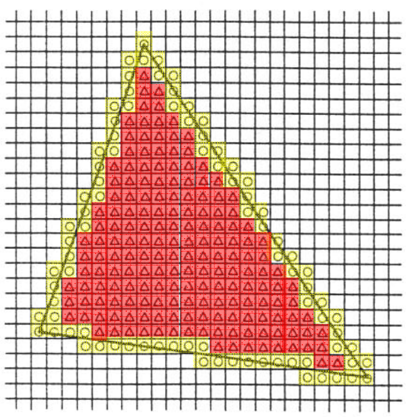
Flächeninhalt *A* des Dreiecks:

4,75 cm² < *A* < 13,5 cm²

Um eine genauere Berechnung der Fläche zu bekommen, können wir die Einheitsquadrate verkleinern. In dieser Zeichnung mit einem Einheitsquadrat von 0.25cm² (da die Länge einer Quadratseite 0.5 cm beträgt, ist die Fläche 0.5 cm • 0.5 cm = 0.25 cm²) können wir feststellen, dass genau 19 solche Quadrate (rot markiert) im Dreieck liegen, dagegen sind 35 Einheitsquadrate in irgend einer Form angeschnitten, also zum Teil im Dreieck enthalten.
Wir können also aussagen, dass das Dreieck ein Fläche hat, die sicher grösser ist als 19 Einheitsquadrate (4.75 cm²), auf jeden Fall auch kleiner als 54 Einheitsquadrate (13.5 cm², 19 ganze und 35 angeschnittene).

⇨ **Diese Methode ist zwar etwas besser, aber noch immer ungenau.**

3. 2-mm-Gitter



: 7,16 cm² 179 · 0,04 cm² liegen vollständig im Dreieck

: 3,44 cm² 86 · 0,04 cm² liegen zum Teil im Dreieck

Flächeninhalt *A* des Dreiecks:

7,16 cm² < *A* < 10,6 cm²

Mit dieser noch feineren Einteilung können wir den Flächeninhalt des Dreieckes noch besser annähern. Die Einheitsquadrate werden kleiner, die untere und die obere Grenze kommen immer näher zusammen.

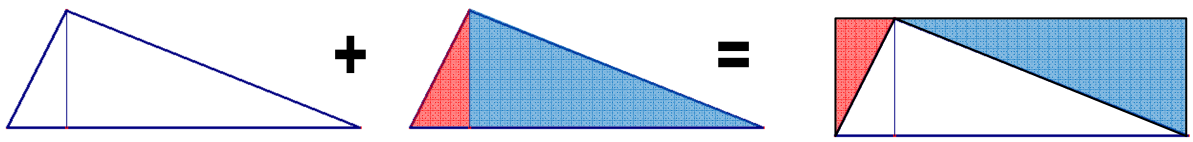
⇨ **Je feiner die Einheitsquadrate, desto besser die Aussage über die Fläche.**

Trotzdem müssen wir eine bessere Methode finden, um die Fläche eines Dreiecks schnell, einfach und eindeutig zu berechnen….

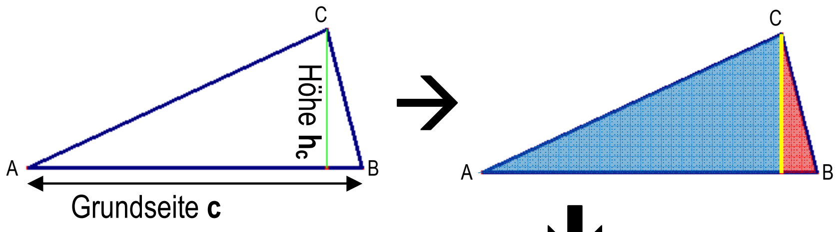
2. Flächenberechnung in Dreiecken

2.1. Aus Dreiecken Rechtecke machen.

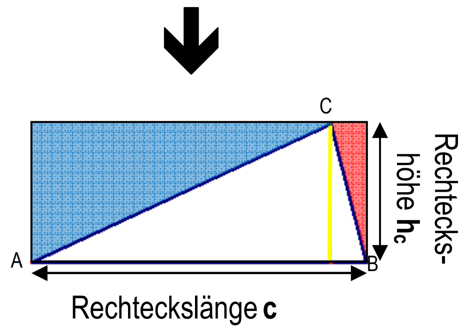
Aus zwei Dreiecken kann man problemlos ein Rechteck basteln. Man darf die Dreiecke ja zerschneiden, die Teile neu anordnen und kann so dafür sorgen, dass man ein schönes, korrektes Rechteck bekommt. Dies sieht dann zum Beispiel mit rechtwinkligen Dreiecken so aus:



Wie man unschwer aus der Zeichnung entnehmen kann, bilden zwei gleich grosse Dreiecke ein Rechteck. Diese Überlegung funktioniert auch bei allgemeinen Dreiecken:



Das zweite, gleiche Dreieck wird entlang der Höhe zerschnitten. Die abgeschnittenen Teile werden wieder angesetzt.



Wir können also feststellen: Ein Dreieck ist ein halbes Rechteck.

<u>Fläche des Rechtecks:</u> Länge mal Breite **(c • h$_c$)**

<u>Fläche des Dreiecks:</u> Grundseite mal zugehörige Höhe durch 2 **(c • h$_c$: 2)**

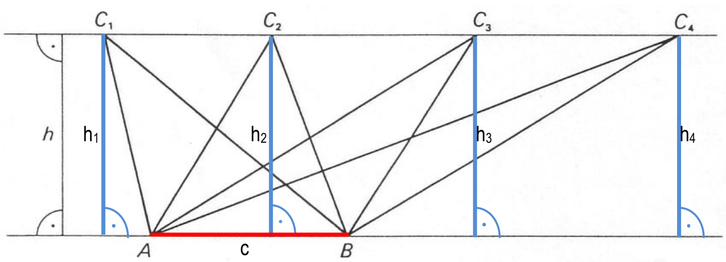
Es gilt somit für jedes Dreieck : $\mathbf{A_\triangle} = \textbf{(Grundseite • zugehörige Höhe) : 2} = \dfrac{\text{Grundseite • Höhe}}{2}$

Da es keine Rolle spielt, entlang welcher Höhe das Dreieck zerschnitten wird gilt logischerweise:

$\mathbf{A_\triangle}$ = (Grundseite • Höhe) : 2= $(a \cdot h_a) : 2 = (b \cdot h_b) : 2 = (c \cdot h_c) : 2$

2.2. Dreiecke mit gleicher Höhe.

Wenn wir verschiedene Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe betrachten, so wird uns klar, dass deren Fläche – trotz verschiedenem Aussehen gleich sein muss. Denn Grundseite mal Höhe durch 2 ist unabhängig von der Form des Dreieckes.

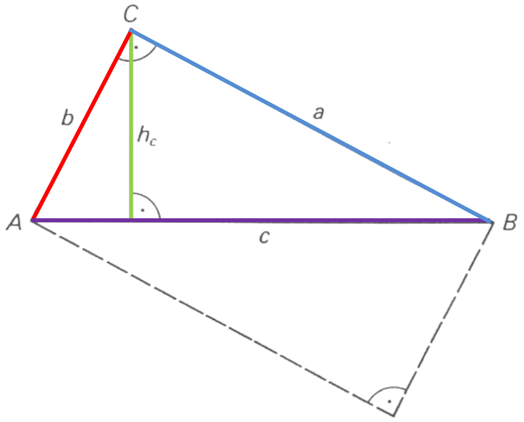


Weil $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_c$ gilt für alle Dreiecke:

$\mathbf{A_\triangle}$ = (Grundseite • Höhe) : 2 = $(c \cdot h_c) : 2$

Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher (zugehöriger) Höhe haben immer den gleichen Flächeninhalt

2.3. Spezialfall „rechtwinklige Dreiecke“



Im rechtwinkligen Dreieck <u>kann die Fläche wie gewohnt berechnet werden:</u>

A△= (Grundseite • Höhe) : 2 = (c • h_c) : 2

Die spezielle Eigenschaft der Seiten a und b allerdings ist die, dass die Seite a gleichzeitig die Höhe h_b ist (die Seite a steht senkrecht auf der Seite b und geht durch den Eckpunkt B)
Und ebenso ist die Seite b gleichzeitig die Höhe h_a.

<u>Somit kann die Fläche bei rechtwinkligen Dreiecken auch so berechnet werden</u>:

A△= (Grundseite • Höhe) : 2 = (a • h_a) : 2 = (b • h_b) : 2

oder in Kurzform: A△= (a • b) : 2

Im rechtwinkligen Dreieck sind die beiden an den rechten Winkel angrenzenden Seiten (=Katheten) jeweils Grundseite und zugehörige Höhe.

Aufgaben “Flächenberechnung in Dreiecken“:

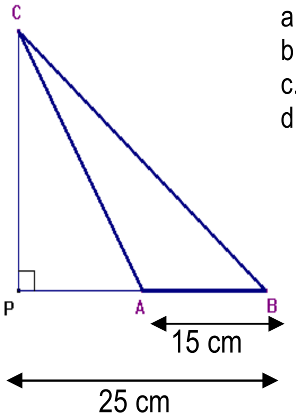
1. **Konstruiere ein Dreieck mit a = 2 cm, b= 3 cm, c= 4cm. Berechne danach die Fläche dieses Dreiecks.**

2. **Berechne die Fläche eines Dreiecks mit der Höhe h_b= 15cm und der Seite b = 20cm.**

3. Vervollständige die Tabelle (grau schattierte Zellen nicht berechnen. Runde auf 2 Kommastellen!)

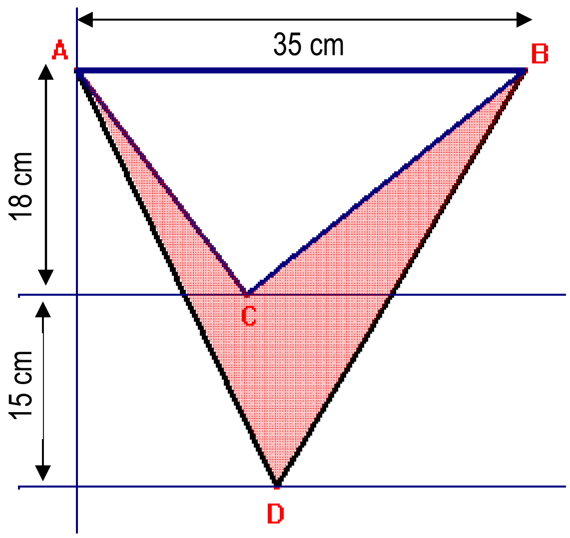
BC = a	AC = b	AB = c	ha	hb	hc	Fläche A
8 cm		10 cm	4cm			
9 cm	5 cm			12 cm	6 cm	
4 cm		9 cm		6 cm		52 cm^2
	2 cm		6 cm		10 cm	100 cm^2

4. Wie lange muss die Strecke CP ein, wenn das Dreieck ABC eine Fläche von

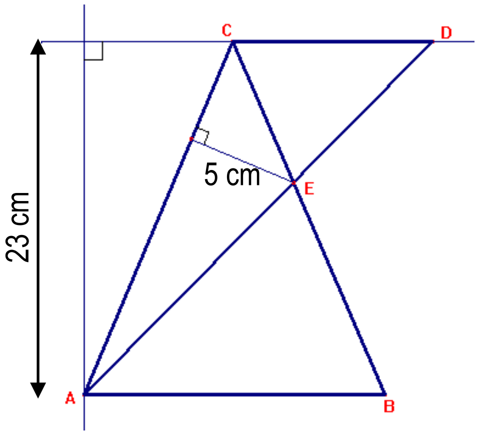


a. 50cm^2 hat
b. 189 cm^2 hat
c. 94cm^2 hat.
d. 62cm^2 hat.

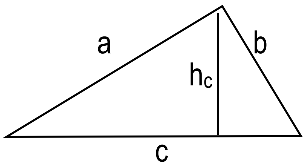
5. Berechne die Fläche der markierten Fläche.



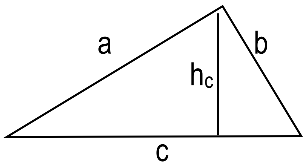
6. **Berechne die Fläche des Dreiecks CDE (CD = 8 cm, AB = 12cm, AC = 27 cm)**



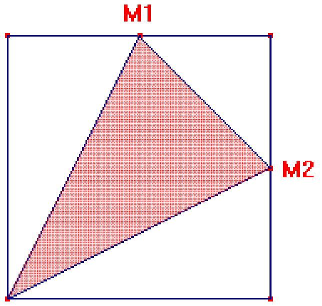
7. **Im rechtwinkligen Dreieck ist die Seite c = 20cm und die Höhe hc = 9.6cm. Berechne die Länge der Strecke b, wenn die Strecke a = 12cm.**



8. **Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Flächeninhalt von 200cm². Berechne**
   a. **die Seite a, wenn die Seite b = 50 cm und c = 60cm**
   b. **die Seite b, wenn die Seite a = 10cm und c = 60cm**
   c. **die Höhe h_c, wenn die Seite a = 15 cm und c = 20cm**



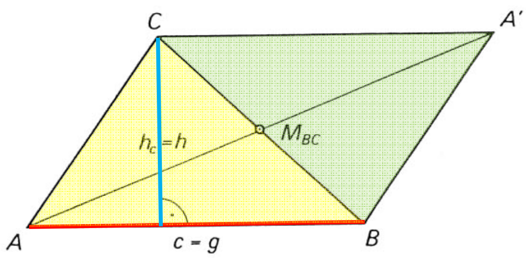
9. **Das abgebildete Quadrat hat einen Flächeninhalt von 100cm². Berechne**
   a. **Den Inhalt der schraffierten Fläche in cm²**
   b. **Den Inhalt der schraffierten Fläche als Bruchteil der Quadratfläche.**



3. Flächenberechnung in Vierecken

3.1. Flächenberechnung im Rhomboid (Parallelenviereck mit AB ≠ BC).

Aus zwei Dreiecken kann man problemlos ein Rechteck basteln. Man darf die Dreiecke ja zerschneiden, die Teile



Den Rhomboid können wir in zwei gleich grosse Dreiecke aufteilen, zum Beispiel in die Dreiecke ABC und BA'C.

Die Fläche kann damit berechnet werden:

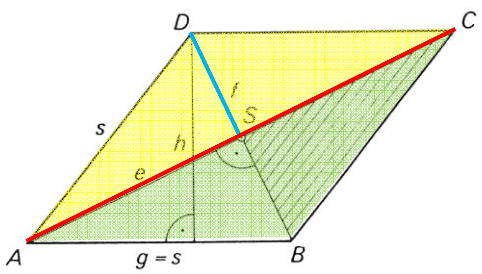
A▱ = 2•A△= 2• (Grundseite • Höhe) : 2 =2• (c • h_c) : 2 = c • h_c

Kurzform: A▱ = Grundseite • Höhe = c • h_c = g • h

Die Fläche des Rhomboides berechnet sich durch Grundseite mal Höhe. Diese Berechnungsart ist auch für Rechtecke, den Rhombus und Quadrate gültig.

3.2. Spezialfall Rhombus (Parallelenviereck mit vier gleich langen Seiten).

Der Rhombus hat die gleichen Eigenschaften wie ein Rhomboid. Seine Fläche lässt sich also auch gleich berechnen, mit Grundseite mal Höhe.



Allgemeine Berechnung **A▱ = Grundseite • Höhe = g • h**

<u>Doch der Rhombus hat noch mehr Eigenschaften</u>: Seine Diagonalen stehen senkrecht und schneiden sich in der Mitte. Damit können wir zwei gleiche Dreiecke teilen, z.B. die Dreiecke ABC und ACD.

So ist die Fläche des Rhombus:

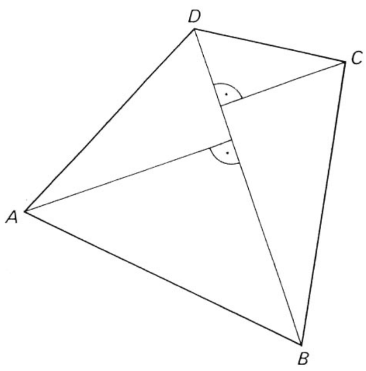
A▱ = 2•A△= 2• (Grundseite • Höhe) : 2 =2• (e• f::2) : 2 = e • f : 2

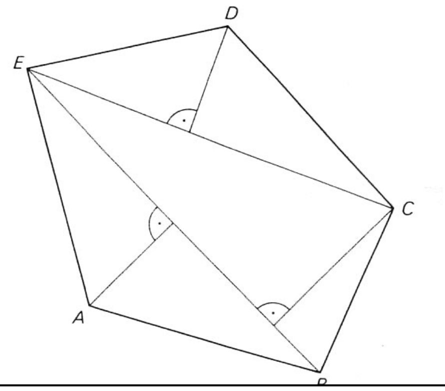
oder in Kurzform: A▱ = (e • f) : 2

Die Fläche des Rhombus kann auch ausgerechnet werden, in dem man die Diagonalen e und f miteinander multipliziert und das Ergebnis durch 2 teilt. A = (e • f) : 2

4. Flächenberechnung in allgemeinen Vielecken (Fläche im n-Eck)

Die Fläche von beliebigen Vielecke (n-Ecke) kann durch Zerlegung in Dreiecke problemlos berechnet werden:





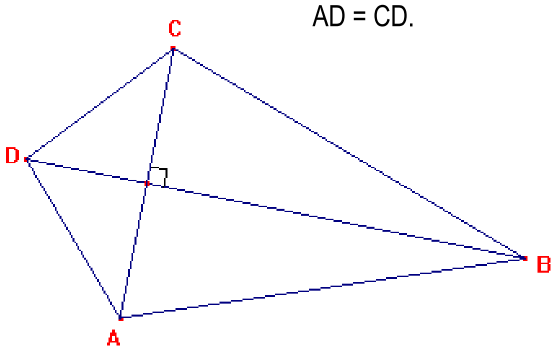
Die Fläche von jedem beliebigen n-Eck kann durch geeignete Unterteilung in Dreiecke ohne Schwierigkeiten berechnet werden.

Aufgaben "Flächenberechnung in Vierecken und allgemeinen Vierecken":

1. Berechne im Drachenviereck ABCD den Flächeninhalt A.

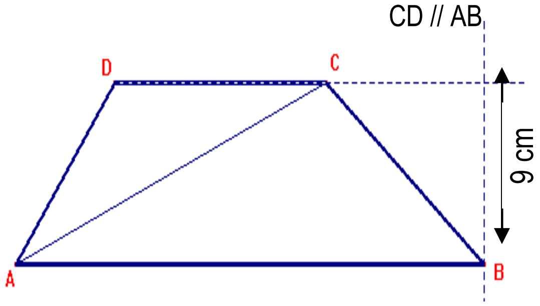
Gegeben: AC = 24cm, BD = 100cm, AD = CD.

Gesucht: Fläche A (in cm^2)



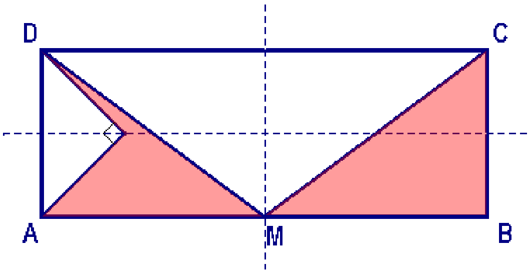
2. Berechne den Inhalt der Fläche ABCD

Gegeben: AB = 15 cm, CD = 7 cm, CD // AB



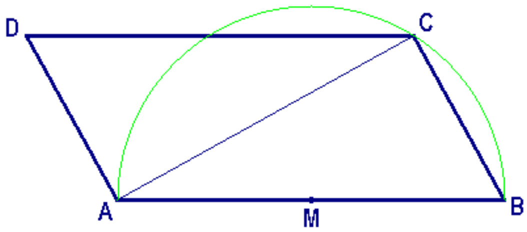
3. **Berechne den Inhalt der markierten Fläche**

Gegeben: AB = 20 cm
BC = 15 cm
CD // AB



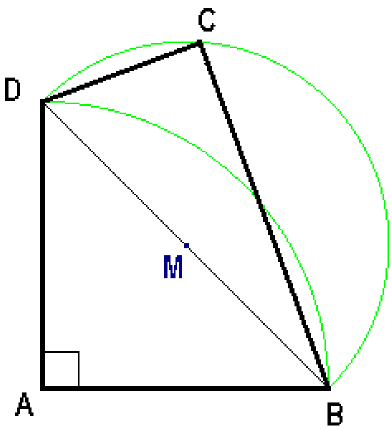
4. **Berechne den Inhalt des Rhomboides ABCD**

Gegeben: AB = CD = 15 cm
BC = AD = 9 cm
AC = 12 cm

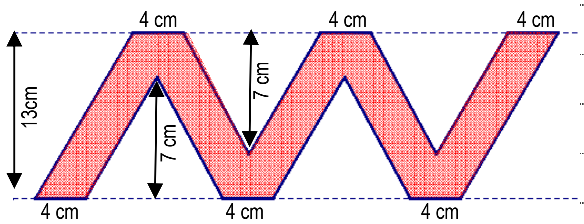


5. **Berechne den Inhalt des Vierecks ABCD**

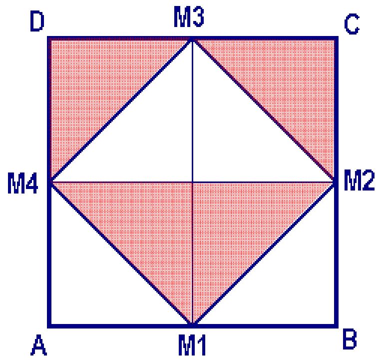
Gegeben: AB = 10 cm, BC = 15 cm, CD = 7cm



6. **Berechne den Inhalt der abgebildeten Streifen-Fläche.**

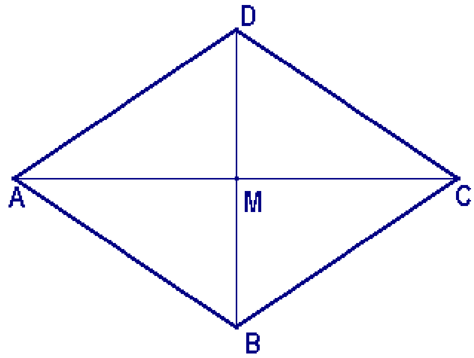


7. **Berechne den Inhalt der markierten Fläche im Quadrat mit Seitenlänge 20cm.**

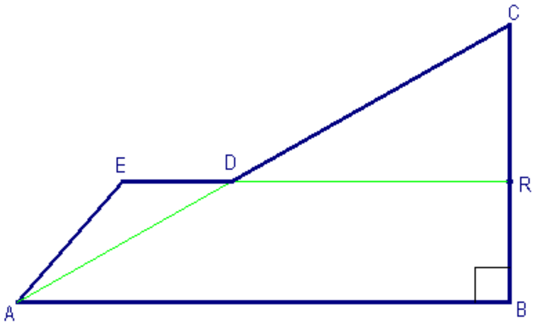


8. **Berechne den Flächeninhalt des gegebenen Rhombus.**

Gegeben: AB = 10cm, AM = 8 cm, BM = 6 cm



9. **Berechne den Inhalt der gegebenen Figur.**
Gegeben: AB = 13cm, BC = 8cm, CD = 6 cm, DE = 4cm, AE = 5 cm, BR = 3.5 cm. DR // AB



10. **Berechne den Inhalt der gegebenen Figur.**
Gegeben: AB = 10cm, BC = 6cm, CD = 4 cm, DE = 3 cm, EF=5.5 cm, FA = 11 cm. GR = 7cm, PQ = DE, QE = 2cm, AR = FR, ABCR ist ein Rhomboid, ARFG ist ein Rhombus.