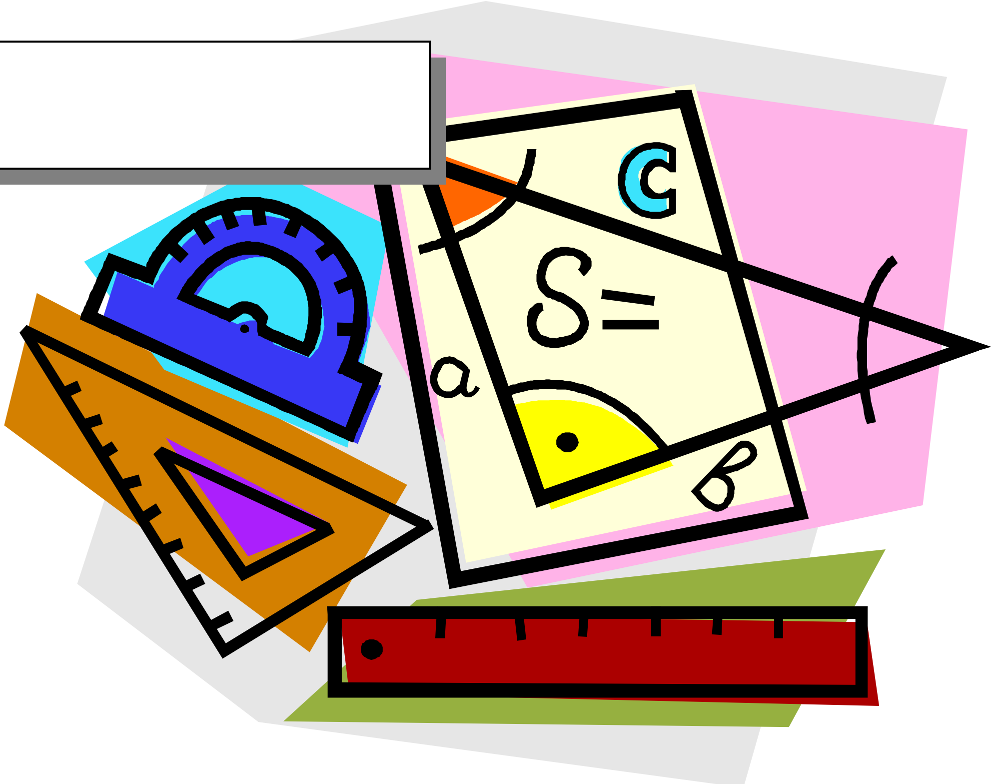
Geometrie-Dossier
Ähnlichkeit

Name:

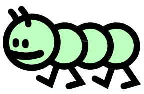


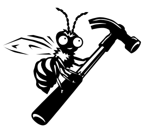
Inhalt:

- **Die beiden Strahlensätze (1. und 2. Strahlensatz)**
- **Lösen von Aufgaben mit Hilfe der Ähnlichkeit und den Strahlensätzen**

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

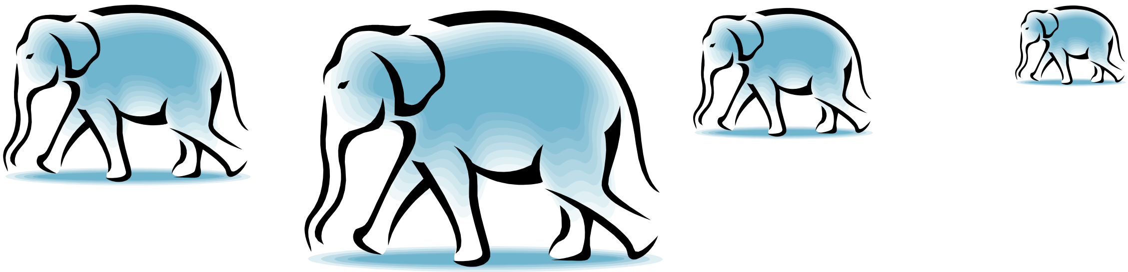
Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

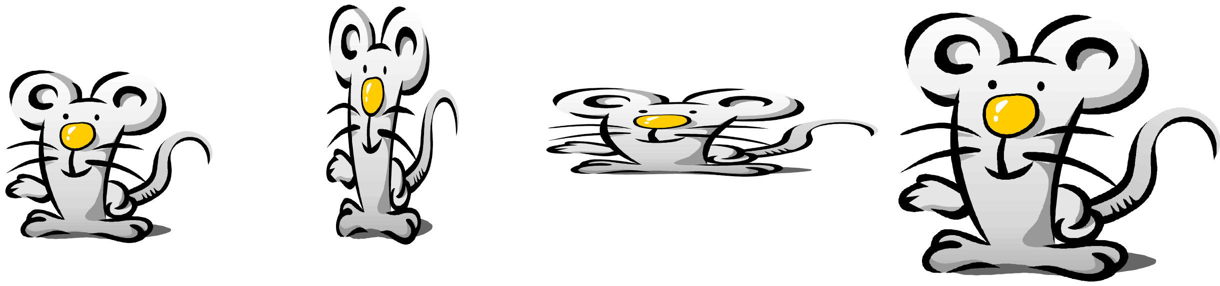
Beachten:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*
	Sichtbarkeit:	*In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.*

1. Ähnlichkeit – Begriff, Herleitung des 1. und 2. Strahlensatz

Ähnliche Figuren



Alle hier abgebildeten Elefanten sind ähnlich (das heisst, sie sind vergrössert oder verkleinert). Es handelt sich immer um den gleichen Elefant, der allerdings verschieden gross abgebildet ist.



Dagegen sind von den vier hier gezeigten Mäusen nur zwei ähnlich zueinander, nämlich die erste und die letzte. Die beiden anderen sind nicht korrekt vergrössert worden (das Verhältnis von Höhe und Breite ist nicht das Selbe wie beim Original).

Diese Figuren erinnern uns an zwei Themenbereiche, die wir schon in vergangenen Lektionen besprochen haben: Die zentrische Streckung als geometrischer Themenbereich, die Proportionalität als mathematisches Thema mit gleicher Grundidee. **Ähnlich heisst, dass die Form der Figuren gleich bleibt, wobei die Grösse der Figuren nicht unbedingt gleich bleibt, also eine Vergrösserung oder Verkleinerung** (→ Streckfaktor in der zentrischen Streckung, Proportionalitätsfaktor in der Proportionalität)

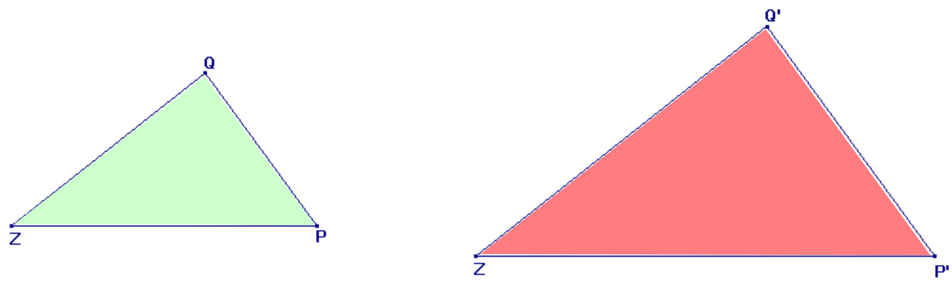
Entscheidend dabei ist die Tatsache, dass sich jeweils eine Originalstrecke proportional zu ihrer zugehörigen Bildstrecke verhält, oder anders gesagt:

Originalstrecke • Streckfaktor = Bildstrecke *(Originalstrecke • Proportionalitätsfaktor = Bildstrecke)*

Der zweite Strahlensatz

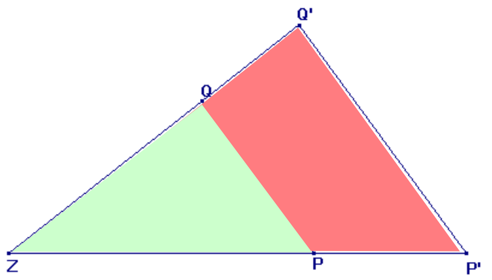
Wir beweisen zuerst den zweiten Strahlensatz, weil dieser einfacher erklärt werden kann. Dennoch heisst er „zweiter Strahlensatz", weil dies eine internationale Norm der Namensgebung ist. Also nicht verwirren lassen und aufmerksam weiter lesen:

1. **Schritt:**
   Wir zeichnen die beiden ähnlichen Dreiecke ZPQ und ZP'Q'. Es gilt: **$\Delta ZPQ \sim \Delta ZP'Q'$** (~ heisst: ist ähnlich zu)

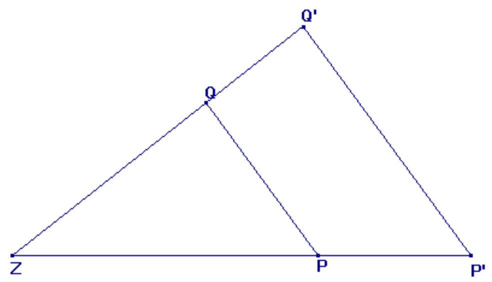


2. **Schritt:**

Wir schieben die Dreiecke so übereinander, dass der Punkt Z für beide Dreiecke am gleichen Ort liegt:

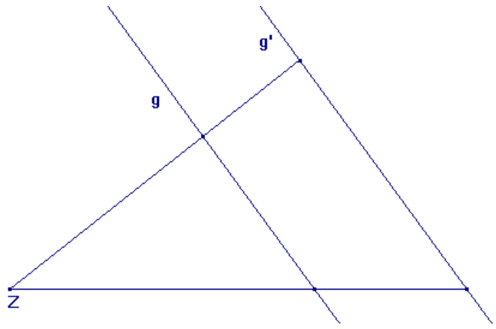


ohne Farben:

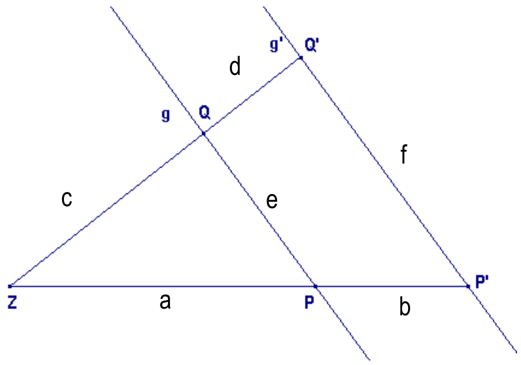


Die Figur ist jetzt eine typische Figur der zentrischen Streckung, verallgemeinert sieht sie wie folgt aus:

Es gilt jetzt: PQ // P'Q' und somit **g // g'**



Wir beschriften die Abschnitte in der Zeichnung:



Nach zentrischer Streckung gilt ja:

$$\frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}} = \text{Streckfaktor}$$

Führen wir diese Überlegung zu Ende, muss diese Gesetzmässigkeit ja für jede Bild – und Originalstrecke gelten.

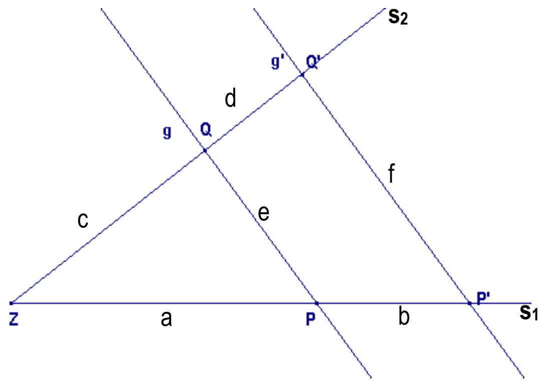
Somit gilt : $$\frac{\textbf{Bildstrecke}}{\textbf{Originalstrecke}} = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{c+d}}{\mathbf{c}} = \text{Streckfaktor } k$$ **(2. Strahlensatz)**

Ausformuliert heisst der zweite Strahlensatz:

Werden zwei Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die vom Streckzentrum aus gemessenen Abschnitte auf einem Strahl.

Der erste Strahlensatz

Nach dem zweiten folgt der erste Strahlensatz:



1. Schritt:

Wir verwenden die gleiche, beschriftete Figur wie vorher:
(k ist der Streckfaktor):

Auf dem Strahl s_1 gilt:		*Auf dem Strahl s_2 gilt.*	
$\frac{a+b}{a} = \frac{\textit{Bildstrecke}}{\textit{Originalstrecke}} = k$		$\frac{c+d}{c} = \frac{\textit{Bildstrecke}}{\textit{Originalstrecke}} = k$	
$\frac{a+b}{a} = k$	¦ • a	$\frac{c+d}{c} = k$	¦ • c
$a + b = ak$	¦ - a	$c + d = ck$	¦ - c
$b = ak - a$	¦ auskl.	$d = ck - c$	¦ auskl.
$b = a(k - 1)$	¦ : a	$d = c(k - 1)$	¦ : c
$\frac{b}{a} = k - 1$		$\frac{d}{c} = k - 1$	

weil beide Seiten k-1 ergeben gilt:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Somit gilt : $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ **und ebenso gilt *(durch Umformung)* :** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **(1. Strahlensatz)**

<u>Ausformuliert heisst der erste Strahlensatz:</u>

Werden zwei Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Gerade wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Gerade.

stets ähnliche Figuren:

Immer ähnlich zueinander sind folgende Figuren:

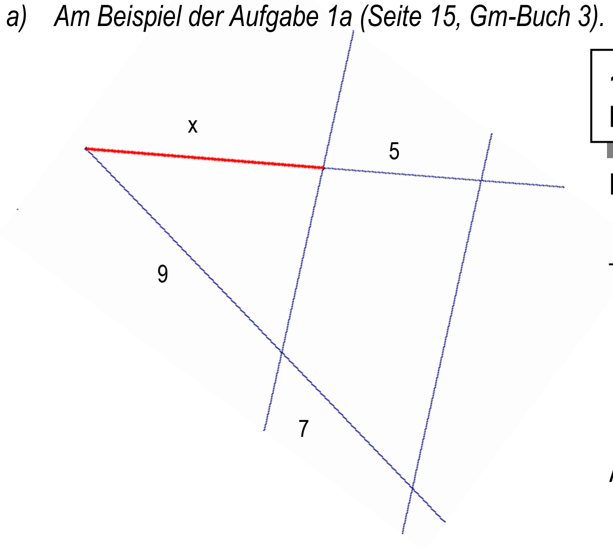
- Quadrat
- gleichseitiges Dreieck
- Kreis
- Dreiecke mit drei entsprechend gleichen Winkeln

In diesen ähnlichen Figuren können entsprechende Verhältnisse gebildet und verwendet werden (siehe nächste Seite)

Verwenden der Ähnlichkeit zur Lösung von Problemstellungen – Beispiellösungen zur Berechnung:

Die Ähnlichkeit bei Figuren hilft, verschiedene Problemstellungen zu lösen. Wichtig ist dabei, eine saubere Zuordnung der ähnlichen Strecken zu machen. Denn dann lässt sich einfach rechnen

a) Am Beispiel der Aufgabe 1a (Seite 15, Gm-Buch 3).



1. Strahlensatz, weil sich alles auf die beiden Strahlen konzentriert, keine Verwendung der Parallelen!

Nach dem **ersten Strahlensatz** gilt in dieser Figur:

$\frac{x}{5} = \frac{9}{7}$ *(Werden zwei Strahlen von Parallelen geschnitten, verhalten sich entsprechende Abschnitte auf den Strahlen gleich)*

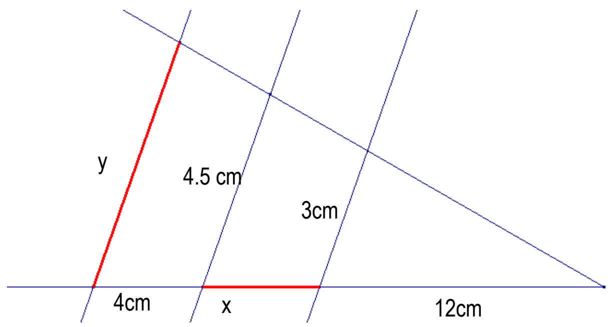
Also gilt:

$$\frac{x}{5} = \frac{9}{7} \qquad ¦¦ \bullet \text{ HN } (35)$$

$$7x = 45 \qquad ¦¦ : 7$$

$$\mathbf{x = \frac{45}{7}\ cm} \qquad \mathbf{(= 6.43cm)}$$

b) Am Beispiel der Aufgabe 2d (Seite 16, Gm-Buch 3)



2. Strahlensatz, weil hier die Parallelen und die Strahlen verwendet werden!

Nach dem **zweiten Strahlensatz** gilt in dieser Figur:

$$\frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}} = \frac{12 + x}{12} = \frac{4.5}{3} \text{ und } \frac{12+x+4}{12} = \frac{y}{3}$$

(Werden zwei Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die vom Streckzentrum aus gemessenen Abschnitte auf einem Strahl)

<u>Berechnung von x:</u>

Also gilt:

$$\frac{12 + x}{12} = \frac{4.5}{3} \qquad ¦¦ \bullet \text{ HN } (12)$$

$$12 + x = 18 \qquad ¦¦ -12$$

$$\mathbf{x = 6cm}$$

<u>Berechnung von y:</u>

Also gilt:

$$\frac{12+x+4}{12} = \frac{y}{3} \qquad ¦¦ \text{ x einsetzen von vorher}$$

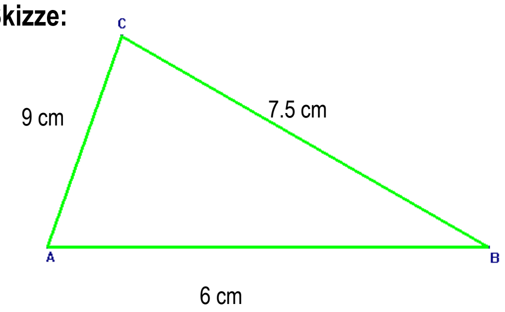
$$\frac{12+6+4}{12} = \frac{y}{3} \qquad ¦¦ \text{ ausrechnen und } \bullet \text{ HN } (12)$$

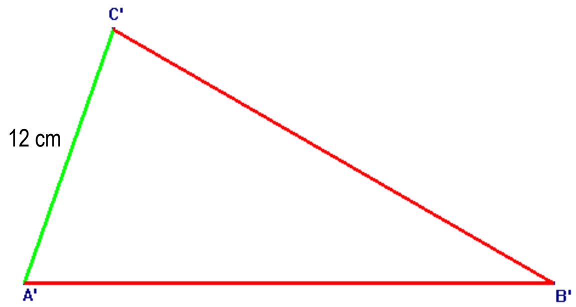
$$22 = 4y \qquad ¦¦ : 4$$

$$\mathbf{5.5cm = y}$$

c) *Am Beispiel der Aufgabe 10b (Seite 19, Gm-Buch 3)*

Skizze:





<u>Gegeben:</u> AB = 6cm, AC = 9cm, BC = 7.5cm A'C' = 12cm
<u>Gesucht:</u> A'B', B'C'.

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke wissen wir, dass das Verhältnis von Bild – und zugehöriger Originalstrecke für alle Seiten gleich sein muss.

$$\frac{\text{Bildstrecke 1}}{\text{Originalstrecke 1}} = \frac{\text{Bildstrecke 2}}{\text{Originalstrecke 2}} = \frac{\text{Bildstrecke 3}}{\text{Originalstrecke 3}}$$

Also gilt in diesen beiden ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

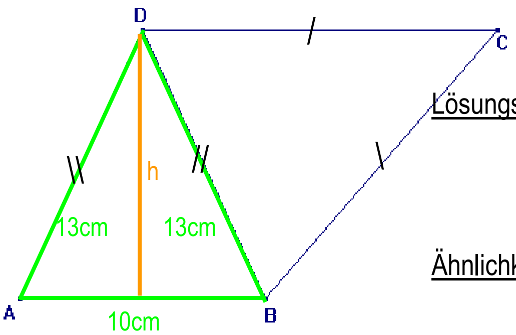
somit berechnen wir A'B' wie folgt:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} \rightarrow \frac{12}{9} = \frac{A'B'}{6} \rightarrow \mathbf{A'B' =} \frac{12 \bullet 6}{9} = \frac{72}{9} \mathbf{= 8\ cm}$$

und enstprechend berechnen wir B'C':

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \rightarrow \frac{12}{9} = \frac{B'C'}{7.5} \rightarrow \mathbf{B'C' =} \frac{12 \bullet 7.5}{9} = \frac{90}{9} \mathbf{= 10\ cm}$$

d) *Am Beispiel der Aufgabe 17 (Seite 21, Gm-Buch 3)*



Berechne Umfang und Flächeninhalt des aus zwei gleichschenklichen Dreiecken zusammengesetzen Trapezes ABCD. *(AB = 10cm, AD = 13cm)*

<u>Lösungsansatz:</u> Die markierten Strecken sind paarweise gleich lang, also AD = AB und BC = CD. Zudem sind die beiden Dreiecke (wie beschrieben) zueinander ähnlich.

Es gilt also: $\Delta ABD \sim \Delta BCD$.

<u>Ähnlichkeitsidee:</u> In ähnlichen Dreiecken haben entsprechende Strecken das gleiche Verhältnis, es gilt hier also:

$$\frac{\text{Schenkel kleines Dreiecks AD}}{\text{Basis kleines Dreieck AB}} = \frac{\text{Schenkel grosses Dreiecks BC}}{\text{Basis grosses Dreieck BD}}$$

<u>in Zahlen:</u>

$$\frac{13\text{cm}}{10\text{cm}} = \frac{\text{Schenkel grosses Dreiecks BC}}{13\text{cm}}$$

<u>Gleichung:</u>

$$\frac{13}{10} = \frac{x}{13} \quad ¦¦ \bullet 130 \text{ (Hauptnenner)}$$

$$13 \bullet 13 = x \bullet 10 \quad ¦¦ \text{ vereinfachen}$$

$$169 = 10x \quad ¦¦ : 10$$

$$16.9 = x$$

<u>Lösungen:</u> **Umfang** = 16.9 + 16.9 + 13 + 10 = **56.8 cm**

Flächenberechnung: $A = m \bullet h$

$$m = \frac{10 + 16.9}{2} = \frac{26.9}{2} = 13.45 \text{ cm}$$

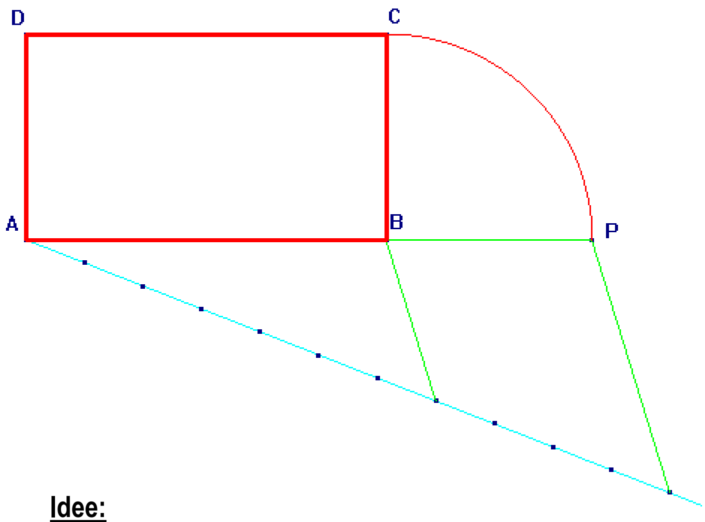
$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ cm}$$

$$\mathbf{A =} m \bullet h = 13.45 \bullet 12 = \mathbf{161.4\ cm^2}$$

Verwenden der Ähnlichkeit zur Lösung von Problemstellungen – Beispiellösungen zur Konstruktion:

Naürlich nützen uns ähnliche Figuren auch für die Konstruktion. Hier folgen wir unserer alten Idee, nicht alle Bedingungen aufs Mal zu erfüllen, sondern diejenigen, die sich leicht erfüllen lassen zuerst (➔ Hilfsfigur) und dann vergrössern, strecken, drehen (in die richtige Grösse und Position bringen).

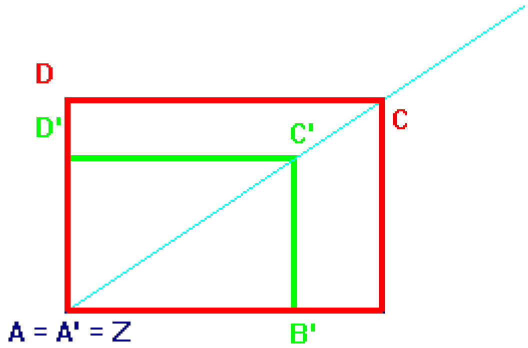
a) *am Beispiel der Aufgabe 8a (Seite 18, Gm-Buch 3)*
Längsseite und Breitseite eines Rechtecks messen zusammen 10cm, ihre Längen verhalten sich wie 7 : 4. Konstruiere das Rechteck. *(Hier ist die Lösung verkleinert gezeichnet)*



1. Die Zusammengesetzte Länge und Breite einzeichnen (➔ AP = 10cm)
2. Die Strecke AP im Verhältnis 7:4 teilen (dies erzeugt die Ähnlichkeitsfigur nach 1. Strahlensatz)
3. Lot von B auf AB, BP nach oben abtragen.
4. Rechteck vervollständigen.

<u>Idee:</u>
Zusammengesetzte Länge von Längs- und Breitseite im richtigen Verhältnis teilen (mit Ähnlichkeit)

b) *am Beispiel der Aufgabe 9a (Seite 18, Gm-Buch 3)*
Konstruiere das Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 2 : 3 verhalten und dessen Diagonale 5cm misst.

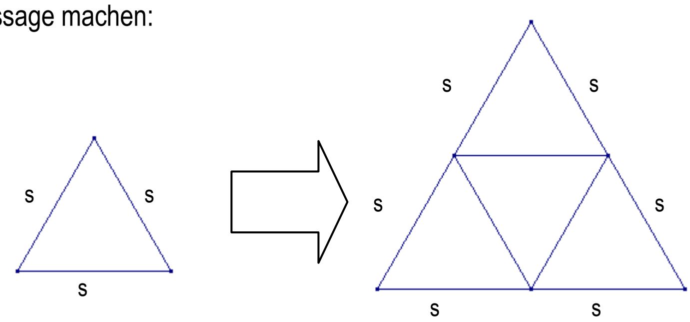


1. Ein Hilfsrechteck A'B'C'D' zeichnen, dessen Länge und Breite sich wie 2:3 verhalten (hier A'B' = 3cm, B'C' = 2cm)
2. Die Diagonale A'C' zeichnen und auf ihr 5cm abtragen. → C
3. Das Hilfsrechteck von A aus strecken (Parallelverschieben von B'C' durch C, D'C' durch C)
4. Rechteck vervollständigen.

<u>Idee:</u>
Zu kleines Rechteck zeichnen, dessen Seitenverhältnis richtig ist (2: 3). Durch Streckung (Ähnlichkeitsabbildung) auf die richtige Grösse bringen.

Flächenverhältnisse bei ähnlichen Figuren:

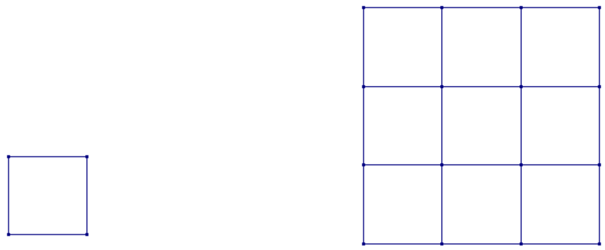
Wie schon bei der zentrischen Streckung bemerkt, können wir auch über das Flächenverhältnis bei ähnlichen Figuren eine Aussage machen:



Seitenlänge s *Seitenlänge 2s*

Verhältnis der Seitenlängen der beiden Dreiecke: 1 : 2

➔ Verhältnis der Flächen: 1 : 4



Seitenlänge s *Seitenlänge 3s*

Verhältnis der Seitenlängen der beiden Quadrate: 1 : 3

➔ Verhältnis der Flächen: 1 : 9

Allgemein gilt: **Das Flächenverhältnis ist quadratisch zum Seitenverhältnis**

Seitenverhältnis 1 : 3 ➔ Flächenverhältnis 1 : 3^2 = 1 : 9

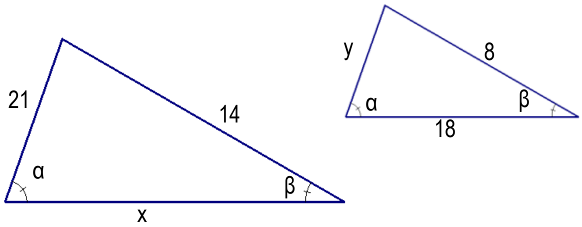
und ganz verallgemeinert:

Seitenverhältnis 1 : n ➔ Flächenverhältnis 1 : n^2

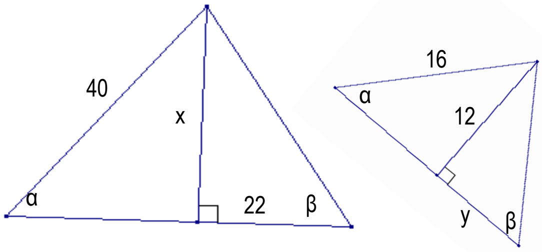
Aufgaben Ähnlichkeit:

1. **Berechne die gesuchten Zahlwerte x, y beziehungsweise z.**

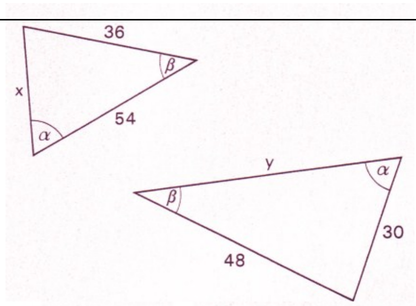
a)



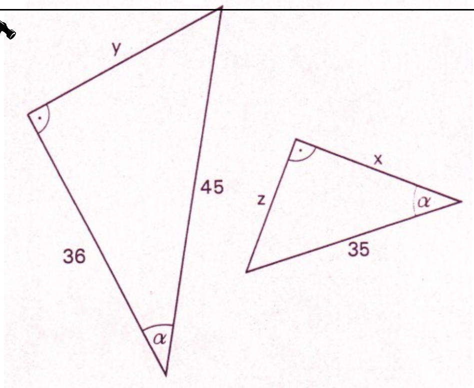
b)



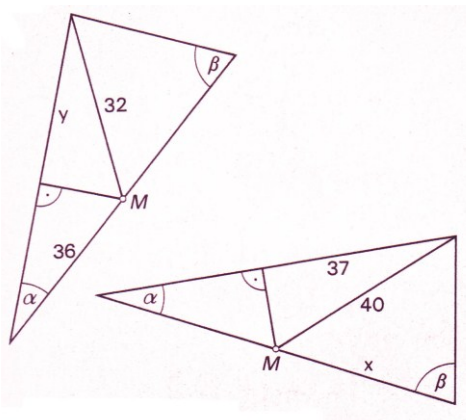
c)



d)

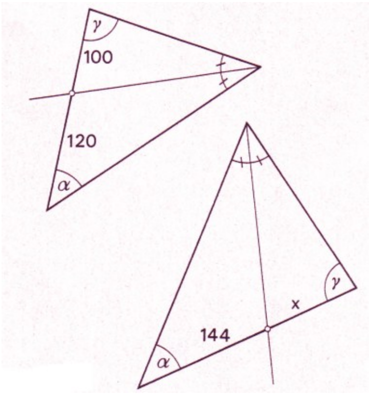


e)

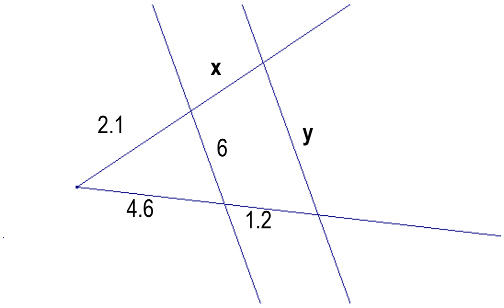


2. Berechne die gesuchten Zahlwerte x, y beziehungsweise z.

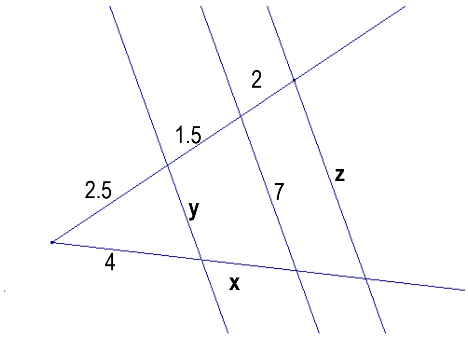
a)



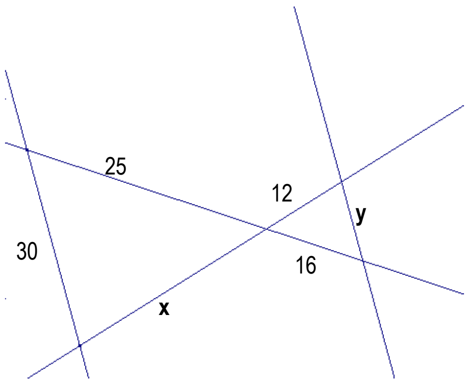
b)



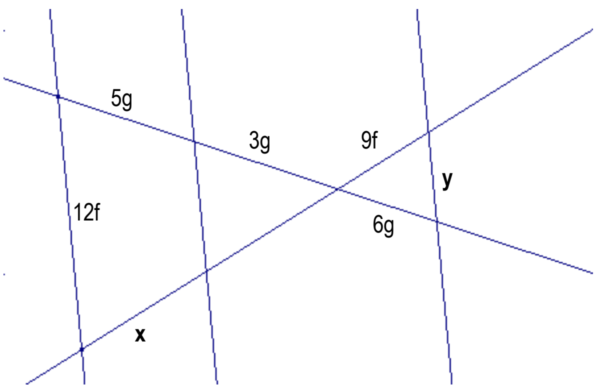
c)



d)



e)



3. Ein Mensch von einer Grösse von 1.69 m wird von einem Scheinwerfer beleuchtet.

a. Der Schatten hat eine Länge von 3.5 m und der Scheinwerfer ist in einer Höhe von 6 m befestigt. Berechne, wie weit der Scheinwerferständer vom Menschen entfernt steht (Bodenlinie)

b. Der Scheinwerfer steht 15m Bodenlinie vom Menschen entfernt und ist in einer Höhe von 3.6m befestigt. Wie lange wird der Schatten?

Arbeite mit einer Skizze:

4. Löse die folgenden Aufgaben durch Konstruktion (Erstelle einen Konstruktionsbericht. Skizze wo nötig):

a) Konstruiere ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 4:5 verhalten und dessen Diagonale 5cm lang ist.

Skizze:

KB:

b) In einem Rhombus verhalten sich BC und BD wie 3:5. Die längere Diagonale im Rhombus misst 7cm. Konstruiere den Rhombus .

Skizze:

KB:

c) Im rechtwinkligen Trapez verhalten sich die beiden Parallelseiten wie 3:2. Die Höhe des Trapezes verhält sich zur kürzeren Parallelseite wie 2:1. Die zweite Schrägseite im Trapez misst 5.5cm. Konstruiere das Trapez.

Skizze:

KB:

d) Ein spitzwinkliges Dreieck ABC (Basis AB) hat einen Winkel $\beta = 65°$. Die Basis AB verhält sich zur Seite BC wie 5:4. Die Höhe h_c misst 5 cm. Konstruiere das Dreieck.

Skizze:

KB:

e) Der Höhenfusspunkt eines rechtwinkligen Dreiecks teilt die Hypothenuse im Verhältnis 4:5. Die kürzere Kathete misst 4.5cm. Konstruiere das Dreieck.

Skizze:

KB:

5. Berechne die gesuchten Längen auf mm genau. Die gegebenen Dreiecke ABC und A'B'C' sind ähnlich.

a) Gegeben: AB = 4cm,
BC = 2cm,
A'B' = 6.5cm
A'C' = 4.5cm.

Gesucht: AC
B'C'

Skizze:

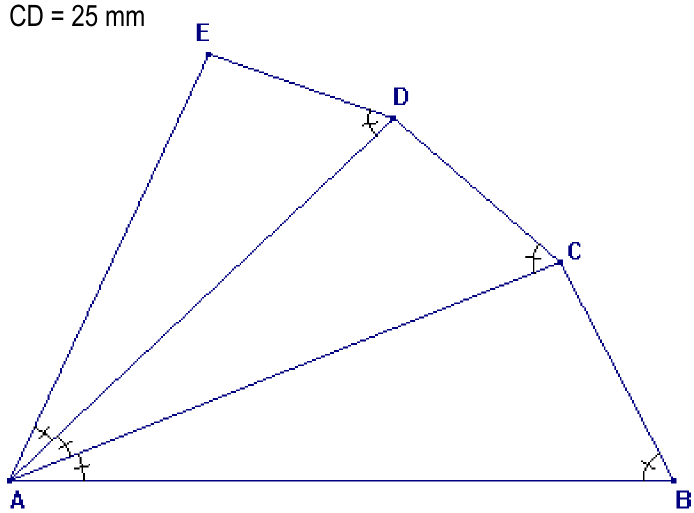
b) Gegeben: BC = 15 cm,
h_a' =18 cm,
A'B' = 21cm
$A_{\triangle ABC} = 90cm^2$.

Gesucht: B'C'
AB

Skizze:

6. Berechne die Länge des Streckenzuges ABCDE

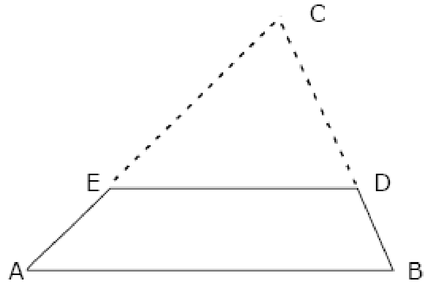
AC = 45 mm
AD = 36 mm
CD = 25 mm



7. Berechne die folgenden Aufgaben:

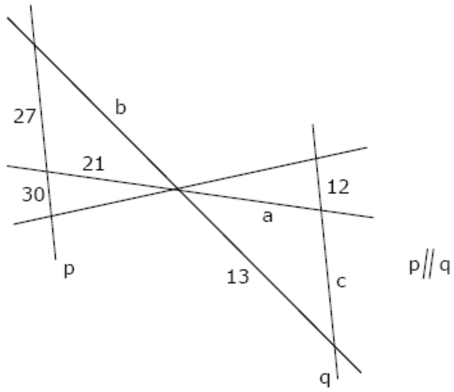
a) Einem Dreieck wurde die Spitze abgeschnitten. Das Reststück in Form eines Trapezes hat Parallelen von 15cm und 18cm, seine Höhe ist 4.5cm. Wie hoch war das Dreieck? (Berechne die Höhe h_c)

Situation:



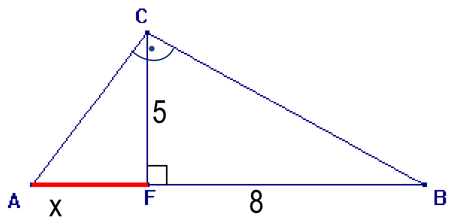
b) Berechne die Zahlwerte für a, b und c. (Die Geraden p und q sind parallel)

Situation:



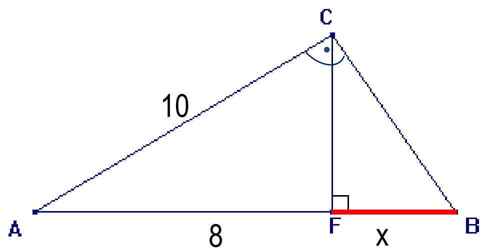
c) Berechne den Zahlwert für die markierte Strecke x (Einheit: cm)

Situation:



d) Berechne den Zahlwert für die markierte Strecke x (Einheit: cm)

Situation:



8. Löse die folgenden Aufgaben:

a) Zwei ähnliche Vierecke haben Flächen von 3 und 9. Bestimme das Verhältnis der Seitenlängen und den Streckfaktor.

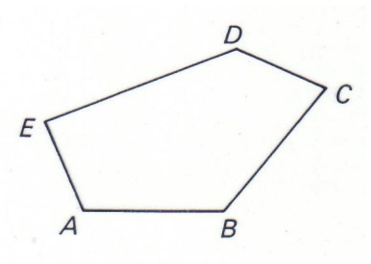
b) Die Seitenlängen zweier Quadrate verhalten sich wie 3 : 5, wobei das grössere einen Flächeninhalt von 100 cm^2 hat. Welche Seitenlänge hat das kleinere der beiden Quadrate?

c) Das Verhältnis von je zwei entsprechenden Seiten von zwei ähnlichen Rechtecken beträgt 3 : 6. Der Flächeninhalt des grösseren, 42cm langen Rechtecks beträgt 504cm^2.

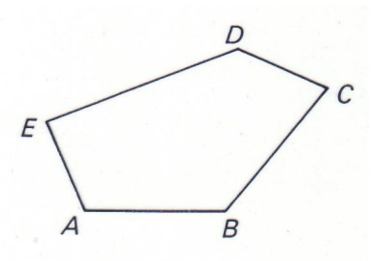
   a. Berechne Länge und Breite des kleineren Rechtecks
   b. Berechne das Flächenverhältnis der beiden Rechtecke.

9. Konstruiere eine Figur, deren Flächeninhalt

a) viermal so gross ist, wie derjenige der gegebenen Figur

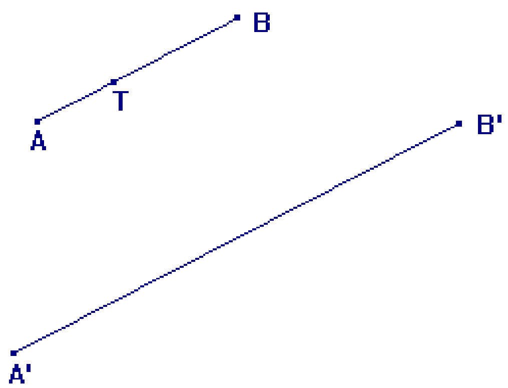


b) zweimal so gross ist, wie derjenige der gegebenen Figur



10. Teile die Bildstrecke im gleichen Verhältnis wie die Originalstrecke:

a)



b)